Automatismes en calcul, semaine du 8 janvier

9 janvier 2024

classes
préparatoires
scientifiques
Lycée Brizeux

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1}\mathrm{d}x \quad ; \quad I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_3 = \int_0^1 (t+3)\mathrm{e}^{1-2t}\,\mathrm{d}t$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1}\mathrm{d}x \quad ; \quad I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_3 = \int_0^1 (t+3)\mathrm{e}^{1-2t}\,\mathrm{d}t$$

$$I_1 = \int_0^1 1 - 3\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = [x - 3\mathrm{Arctan}(x)]_0^1 = 1 - \frac{3\pi}{4}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1}\mathrm{d}x \quad ; \quad I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_3 = \int_0^1 (t+3)\mathrm{e}^{1-2t}\,\mathrm{d}t$$

$$I_1 = \int_0^1 1 - 3\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = [x - 3\mathrm{Arctan}(x)]_0^1 = 1 - \frac{3\pi}{4}$$

Après linéarisation, $I_2 =$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1} \mathrm{d}x \quad ; \quad I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_3 = \int_0^1 (t+3)\mathrm{e}^{1-2t}\,\mathrm{d}t$$

$$I_1 = \int_0^1 1 - 3\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = [x - 3\mathrm{Arctan}(x)]_0^1 = 1 - \frac{3\pi}{4}$$

Après linéarisation, $I_2 =$
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$I_3 = -\frac{9}{4}\mathrm{e}^{-1} + \frac{7}{4}\mathrm{e}$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Soit u telle que $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -3u_n - 4u_{n+1}$.
Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Soit u telle que $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -3u_n - 4u_{n+1}$.
Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est

$$r^2 = -3 - 4r \Leftrightarrow (r+1)(r+3) = 0$$

Il existe donc $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda(-1)^n + \mu(-3)^n$.

Soit u telle que $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -3u_n - 4u_{n+1}$.
Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est

$$r^2 = -3 - 4r \Leftrightarrow (r+1)(r+3) = 0$$

Il existe donc $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda(-1)^n + \mu(-3)^n$.

$u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ donnent $\lambda + \mu = 1$ et $-\lambda - 3\mu = 1$ on en déduit que $\mu = -1$ et $\lambda = 2$.

Soit u telle que $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -3u_n - 4u_{n+1}$.
Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est

$$r^2 = -3 - 4r \Leftrightarrow (r+1)(r+3) = 0$$

Il existe donc $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda(-1)^n + \mu(-3)^n$.

$u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ donnent $\lambda + \mu = 1$ et $-\lambda - 3\mu = 1$ on en déduit que $\mu = -1$ et $\lambda = 2$.

Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2(-1)^n - (-3)^n}$.

Lorsqu'elles existent, donner les limites en 0 et en $+\infty$ de :

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{x+1} \quad ; \quad g(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{2-x} \quad ; \quad h(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{\pi x}$$

Lorsqu'elles existent, donner les limites en 0 et en $+\infty$ de :

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{x+1} \quad ; \quad g(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{2-x} \quad ; \quad h(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{\pi x}$$

$x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc, par opérations, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
$\frac{x}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, par opérations $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Lorsqu'elles existent, donner les limites en 0 et en $+\infty$ de :

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{x+1} \quad ; \quad g(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{2-x} \quad ; \quad h(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{\pi x}$$

$x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc, par opérations, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
$\frac{x}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, par opérations $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par opérations, $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^2$
$\forall x, -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $-\mathrm{e}^{2-x} \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{2-x}$ et, par le théorème des gendarmes, $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Lorsqu'elles existent, donner les limites en 0 et en $+\infty$ de :

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{x+1} \quad ; \quad g(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{2-x} \quad ; \quad h(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{\pi x}$$

$x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc, par opérations, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
$\frac{x}{x+1} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, par opérations $f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par opérations, $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^2$
$\forall x, -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $-\mathrm{e}^{2-x} \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{2-x}$ et, par le théorème des gendarmes, $g(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Si $0 < x < 1$, $h(x) = 0$ et si $-1 < x < 0$, $h(x) = -\frac{1}{\pi x}$ donc h a des limites en 0^+ et en 0^- mais pas en 0.
On a toujours $x - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$ donc, avec le théorème des gendarmes, $g(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}$.