

Automatismes en calcul, semaine du 9 mars

7 mars 2026

Lundi : famille de vecteurs

Mardi : développement limité et application

Mercredi : trouver la dimension d'un EV

Vendredi : fraction rationnelle

On travaille dans $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 3)$, $\vec{v}(3; 1; 2)$ et $\vec{w}(2; 3; 1)$ forment une famille libre ou liée ?

On travaille dans $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 3)$, $\vec{v}(3; 1; 2)$ et $\vec{w}(2; 3; 1)$ forment une famille libre ou liée ?

Soit une combinaison linéaire nulle de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On travaille dans $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 3)$, $\vec{v}(3; 1; 2)$ et $\vec{w}(2; 3; 1)$ forment une famille libre ou liée ?

Soit une combinaison linéaire nulle de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(retrouvez les opérations !)

On travaille dans $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 3)$, $\vec{v}(3; 1; 2)$ et $\vec{w}(2; 3; 1)$ forment une famille libre ou liée ?

Soit une combinaison linéaire nulle de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(retrouvez les opérations !)

La matrice du système est ... donc le système

Finalement la famille est ...

Peut-on prolonger $f(x) = \frac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$ par continuité ?

Peut-on prolonger $f(x) = \frac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$ par continuité ?

$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \iff x \in]-1; 1[\text{ et } \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 0 \iff x = 0.$$

Le domaine de définition de f est donc $] - 1; 1[\setminus \{0\}$.

Peut-on prolonger $f(x) = \frac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$ par continuité ?

$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \iff x \in]-1; 1[\text{ et } \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 0 \iff x = 0.$$

Le domaine de définition de f est donc $] - 1; 1[\setminus \{0\}$.

Par opérations, en -1^+ et en 1^- , $f(x) \rightarrow 0$.

Peut-on prolonger $f(x) = \frac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$ par continuité ?

$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \iff x \in]-1; 1[\text{ et } \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 0 \iff x = 0.$$

Le domaine de définition de f est donc $] - 1; 1[\setminus \{0\}$.

Par opérations, en -1^+ et en 1^- , $f(x) \rightarrow 0$.

$$\frac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})} = \frac{2x}{\ln(1+x) - \ln(1-x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{2x}{2x + o(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

Peut-on prolonger $f(x) = \frac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$ par continuité ?

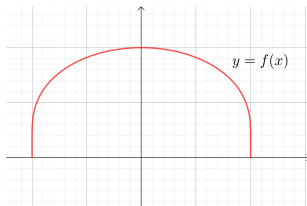
$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \iff x \in]-1; 1[\text{ et } \ln(\frac{1+x}{1-x}) = 0 \iff x = 0.$$

Le domaine de définition de f est donc $] - 1; 1[\setminus \{0\}$.

Par opérations, en -1^+ et en 1^- , $f(x) \rightarrow 0$.

$$\frac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})} = \frac{2x}{\ln(1+x) - \ln(1-x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{2x}{2x + o(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

f se prolonge donc par continuité à $[-1; 1]$ en posant $f(-1) = f(1) = 0$ et $f(0) = 1$.



Justifier rapidement que $A = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P = XP'\}$ est un SEV de $\mathbb{R}_2[X]$ puis donner sa dimension.

Justifier rapidement que $A = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P = XP'\}$ est un SEV de $\mathbb{R}_2[X]$ puis donner sa dimension.

A est non vide car $0 \in A$ et stable par combinaison linéaire, c'est un SEV.

Justifier rapidement que $A = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P = XP'\}$ est un SEV de $\mathbb{R}_2[X]$ puis donner sa dimension.

A est non vide car $0 \in A$ et stable par combinaison linéaire, c'est un SEV.

Soit $P = aX^2 + bX + c$. On a :

$$\begin{aligned} P \in A &\iff P = XP' \iff aX^2 + bX + c = 2aX^2 + bX \\ &\iff a = c = 0 \end{aligned}$$

Justifier rapidement que $A = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P = XP'\}$ est un SEV de $\mathbb{R}_2[X]$ puis donner sa dimension.

A est non vide car $0 \in A$ et stable par combinaison linéaire, c'est un SEV.

Soit $P = aX^2 + bX + c$. On a :

$$\begin{aligned} P \in A &\iff P = XP' \iff aX^2 + bX + c = 2aX^2 + bX \\ &\iff a = c = 0 \end{aligned}$$

On a donc $A = \text{Vect}(X)$ et donc $\dim(A) = 1$.

Décomposer en éléments simples $f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 3x + 2}$.



Décomposer en éléments simples $f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 3x + 2}$.

$$X^4 = (X^2 + 3X + 2)(X^2 - 3X + 7) - 15X - 14 \text{ et}$$
$$X^2 + 3X + 2 = (X + 1)(X + 2)$$

Décomposer en éléments simples $f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 3x + 2}$.

$$X^4 = (X^2 + 3X + 2)(X^2 - 3X + 7) - 15X - 14 \text{ et}$$
$$X^2 + 3X + 2 = (X + 1)(X + 2)$$

On déduit que, pour $x \notin \{-2; -1\}$:

$$f(x) = x^2 - 3x + 7 - \frac{15x + 14}{(x + 1)(x + 2)} = x^2 - 3x + 7 + \frac{\alpha}{x + 1} + \frac{\beta}{x + 2}$$

avec α et β des réels à trouver.

Décomposer en éléments simples $f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 3x + 2}$.

$$X^4 = (X^2 + 3X + 2)(X^2 - 3X + 7) - 15X - 14 \text{ et}$$

$$X^2 + 3X + 2 = (X + 1)(X + 2)$$

On déduit que, pour $x \notin \{-2; -1\}$:

$$f(x) = x^2 - 3x + 7 - \frac{15x + 14}{(x + 1)(x + 2)} = x^2 - 3x + 7 + \frac{\alpha}{x + 1} + \frac{\beta}{x + 2}$$

avec α et β des réels à trouver.

$$\frac{-15x - 14}{x + 2} = \alpha + \frac{\beta(x + 1)}{x + 2} \text{ et en faisant } x \rightarrow -1 \text{ on a } \alpha = 1.$$

De même, on trouve $\beta = -16$.

Décomposer en éléments simples $f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 3x + 2}$.

$$X^4 = (X^2 + 3X + 2)(X^2 - 3X + 7) - 15X - 14 \text{ et}$$

$$X^2 + 3X + 2 = (X + 1)(X + 2)$$

On déduit que, pour $x \notin \{-2; -1\}$:

$$f(x) = x^2 - 3x + 7 - \frac{15x + 14}{(x + 1)(x + 2)} = x^2 - 3x + 7 + \frac{\alpha}{x + 1} + \frac{\beta}{x + 2}$$

avec α et β des réels à trouver.

$$\frac{-15x - 14}{x + 2} = \alpha + \frac{\beta(x + 1)}{x + 2} \text{ et en faisant } x \rightarrow -1 \text{ on a } \alpha = 1.$$

De même, on trouve $\beta = -16$.

A quoi cela peut-il servir ?

A l'écoute cette semaine : Damon Albarn

- ▶ Song 2 + 19-2000 (Soulchild Remix)
- ▶ The good, The Bad And The Queen
- ▶ Clint Eastwood
- ▶ Out of time