Automatismes en calcul, semaine du 9 octobre

15 octobre 2023

CPGE Brizeux Quimper

- Simplifier au maximum le nombre $\dfrac{6^3 \times 12^{-4}}{4^2 \times 2^{-5}}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier au maximum

$$3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$$

- Simplifier au maximum le nombre $\dfrac{6^3 \times 12^{-4}}{4^2 \times 2^{-5}}$.

  On a : $\dfrac{6^3 \times 12^{-4}}{4^2 \times 2^{-5}} = \dfrac{3^3 \times 2^3 \times 3^{-4} \times 2^{-8}}{2^4 \times 2^{-5}} = \dfrac{3^{-1}}{2^4} \boxed{= \dfrac{1}{48}}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier au maximum

$$3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$$

- Simplifier au maximum le nombre $\dfrac{6^3 \times 12^{-4}}{4^2 \times 2^{-5}}$.

On a : $\dfrac{6^3 \times 12^{-4}}{4^2 \times 2^{-5}} = \dfrac{3^3 \times 2^3 \times 3^{-4} \times 2^{-8}}{2^4 \times 2^{-5}} = \dfrac{3^{-1}}{2^4} \boxed{= \dfrac{1}{48}}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier au maximum

$$3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$$

$$3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}(3^3 - 3^2 - 7 \times 3 + 5) \boxed{= 2 \times 3^{n-1}}$$

Résoudre $2x^3 \leq x + 14 \quad \text{et} \quad x^5 > 2 - x$

Résoudre $2x^3 \leq x + 14$ et $x^5 > 2 - x$

$2x^3 \leq x + 14 \iff 2x^3 - x - 14 \leq 0$
$2x^3 - x - 14 = (x-2)(2x^2 + 4x + 7)$ et
$2x^2 + 4x + 7 = 2(x+1)^2 + 5 > 0$ donc $2x^3 - x - 14$ est du signe de $x - 2$.
Finalement, l'ensemble des solutions est $]-\infty; 2]$.

Résoudre $2x^3 \leq x + 14$ et $x^5 > 2 - x$

$2x^3 \leq x + 14 \iff 2x^3 - x - 14 \leq 0$
$2x^3 - x - 14 = (x-2)(2x^2 + 4x + 7)$ et
$2x^2 + 4x + 7 = 2(x+1)^2 + 5 > 0$ donc $2x^3 - x - 14$ est du signe de $x - 2$.
Finalement, l'ensemble des solutions est $]-\infty; 2]$.

$x^5 > 2 - x \iff x^5 + x > 2.$
On pourrait factoriser par $x - 1$ mais voici une autre stratégie

Résoudre $2x^3 \leq x + 14$ et $x^5 > 2 - x$

$2x^3 \leq x + 14 \iff 2x^3 - x - 14 \leq 0$
$2x^3 - x - 14 = (x-2)(2x^2 + 4x + 7)$ et
$2x^2 + 4x + 7 = 2(x+1)^2 + 5 > 0$ donc $2x^3 - x - 14$ est du signe de $x - 2$.
Finalement, l'ensemble des solutions est $]-\infty; 2]$.

$x^5 > 2 - x \iff x^5 + x > 2$.
$f : x \mapsto x^5 + x$ est strictement croissante et continue, elle réalise une bijection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
On a $f(1) = 2$ donc l'ensemble des solutions est $]2; +\infty[$.

Déterminer une racine carrée complexe de $6 - 6i$.

Déterminer une racine carrée complexe de $6-6i$.

- $6-6i=6\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$; une de ses racines carrées est $\sqrt{6\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{8}}$.

Déterminer une racine carrée complexe de $6-6i$.

- $6-6i = 6\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$; une de ses racines carrées est $\sqrt{6\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{8}}$.
- Soit $z = a+ib$. $z^2 = 6-6i \iff \begin{cases} a^2-b^2 = 6 \\ 2ab = -6 \end{cases}$

  $z^2 = 6-6i \Longrightarrow a^2+b^2 = 6\sqrt{2}$ donc le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} a^2-b^2 = 6 \\ a^2+b^2 = 6\sqrt{2} \\ 2ab = -6 \end{cases}$$

On déduit $a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(6+6\sqrt{2})} = \pm\sqrt{3(1+\sqrt{2})}$ et $b = \frac{-3}{a}$

Déterminer une racine carrée complexe de $6-6i$.

- $6-6i = 6\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$; une de ses racines carrées est $\sqrt{6\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{8}}$.
- Soit $z = a+ib$. $z^2 = 6-6i \iff \begin{cases} a^2-b^2 = 6 \\ 2ab = -6 \end{cases}$

  $z^2 = 6-6i \Longrightarrow a^2+b^2 = 6\sqrt{2}$ donc le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} a^2-b^2 = 6 \\ a^2+b^2 = 6\sqrt{2} \\ 2ab = -6 \end{cases}$$

  On déduit $a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(6+6\sqrt{2})} = \pm\sqrt{3(1+\sqrt{2})}$ et $b = \frac{-3}{a}$
- En déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$.