PSI **Janvier 2023**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Séries Entières

1 CCINP

Exercice 1. : Rayon de convergence et somme des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} \mathrm{ch} n x^n$.
2. $\sum_{n\geq 1} n x^n$.

Exercice 2. : Donner le domaine de définition de $x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{(-1)^n+\sqrt{n}}\right) x^n$.

Exercice 3.
1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
2. Déterminer sa somme $f(x)$ par deux méthodes :
   (a) En utilisant les racines cubiques de l'unité.
   (b) En utilisant une équation différentielle vérifiée par f et DSE de exp.

Exercice 4.
1. Montrer que $f : x \mapsto \frac{\sin(x)-x}{x^3}$ est prolongeable par continuité en 0 . On note encore f ce prolongement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donner $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0)$.

Exercice 5. (CCINP 2021)
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite $(a_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ converge.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \geq \frac{1}{n+1}$.
4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
5. Trouver une équation différentielle vérifiée par la somme de cette série

Exercice 6.
1. Montrer la convergence de $I = \int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{x} \mathrm{d}x$.
2. En déduire I sous forme d'une série numérique.

Exercice 7.
1. Donner le développement en série entière de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.
2. En déduire celui de $\frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$.
3. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n} \binom{2n}{n}$ à l'aide d'un produit de Cauchy

Exercice 8. : Etablir un problème de Cauchy vérifié par $f : x \longmapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\, dt$ et en déduire le DSE de f.

Exercice 9. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer la limite de f en 1^-.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} (1-x)f(x) = 0$.

Exercice 10. (CCINP PSI 2021)

Soit la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

1. Montrer que $0 \leqslant \dfrac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$ pour tout n.
2. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n x^n}{n!}$. Montrer que f est définie sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ et est solution de l'équation $y' = y^2$.
3. En déduire une expression de u_n.

2 Mines, Centrale

Exercice 11. (Ecole Navale 2017) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: minorer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{tr}\,(A^p) z^p$ et exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A.

Exercice 12. On considère une série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1. Déterminer le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$.
2. On donne $b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ a un rayon $R' \geqslant 1$ puis déterminer R' en fonction de R.

Exercice 13. On donne une suite réelle $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que $(na_n)_n$ tende vers 0.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.
2. On note $f(x)$ sa somme. Montrer qu'au voisinage de 1^-, $f(x) = o(ln(1-x))$.
3. Réciproquement, si, au voisinage de 1^-, $f(x) = o(ln(1-x))$, $(na_n)_n$ tend-elle vers 0 ?

Exercice 14. (Centrale 2021)

1. Montrer la convergence de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
2. On pose $a_1 = -1$ et pour $n \geq 2, a_n = -\frac{1}{n} - \ln(1-\frac{1}{n})$. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln(n) x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n$. On note f et g leur somme respective.
3. Que peut-on dire de $g(1)$? En déduire un équivalent simple de f en 1.

Exercice 15. (Mines-Ponts PSI 2021)

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ est développable en série entière au voisinage de 0.
2. Encadrer son rayon par deux réels strictement positifs.