PSI **Janvier 2024**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Séries Entières

Exercice 1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :
$$\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{(2n)!}z^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\binom{2n}{n}}{n^n}x^n,\quad \sum_{n\geq 1}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1})x^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{x^{3n}}{n^2+1}x^n,\ \sum_{n\geq 1}\ln n x^n,\quad \sum_{n\geq 1}(e^{\frac{1}{n}}-1)x^n$$

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum \mathrm{ch}\,(n)x^{3n+1}$.

Exercice 3. On pose pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{sh}\,(k)$. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum S_n x^n$.

Exercice 4. Soit $(a_n)_n$ une suite périodique.
1. Montrer qu'elle est bornée.
2. Quel est le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 1}a_n x^n$?

Exercice 5. Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n}{(1+2i)^n}$

Exercice 6. On définit f par $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$
1. Donner son ensemble de définition D.
2. Montrer que f est continue sur D.
3. Montrer que f est C^∞ sur $]-1,1[$. Préciser $f'(x)$.
4. En déduire $f(x)$ pour $x\in]-1,1[$.
5. En déduire les valeurs de $f(1)$ et $f(-1)$.

Exercice 7. On définit S par $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$
1. Donner son ensemble de définition D.
2. Montrer que S est continue sur D.
3. Montrer que S est C^∞ sur $]-1,1[$.
4. Montrer que S est dérivable en -1 et déterminer $S'(-1)$.

Exercice 8. Soit $a>0$.
1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^a}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+na}$.
2. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 9.
1. Montrer la convergence de $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire I sous forme d'une série numérique.

Exercice 10. : Etablir un problème de Cauchy vérifié par $f: x\longmapsto\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ et en déduire le DSE de f.

Exercice 11. Déterminer les solutions développables en série entière solutions des équations différentielles suivantes :
1. $x^2y''-x(2x^2-1)y'-(2x^2+1)y=0$.
2. $x^2y''+4xy'+2y=e^x$.

Exercice 12. On donne $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{a_n}{n!} \leq 1$.
2. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ est au moins définie sur $]-1, 1[$.
3. Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra.
4. Exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.

Exercice 13. DSE de

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
2. $f(x) = \dfrac{\sin(4x)}{\sin(x)}$
3. $f(x) = \ln(x^2 - 8x + 15)$
4. $f(x) = \dfrac{1}{2 + x - x^2}$
5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \sin(\alpha \mathrm{Arcsin} x)$

Exercice 14. (Mines 2018)Soit pour $n \geq 1$, $a_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ puis étudier la convergence aux bornes du domaine.

Exercice 15. (Centrale 2015)On pose $D_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, D_n est le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ sans point fixe. On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n! = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} D_k$
2. Montrer que le rayon de convergence de $S(x)$ est supérieur ou égal à 1.
3. Calculer $e^x S(x)$ puis déterminer D_n.
4. Trouver un équivalent de D_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 16. (Mines 2018)Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{x + e^t}\, \mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est développable en série entière et calculer $f(p)(0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$

Exercice 17. (Centrale 2015)
On donne une suite réelle $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que $(na_n)_n$ tende vers 0.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.
2. On note $f(x)$ sa somme. Montrer qu'au voisinage de 1^-, $f(x) = o(ln(1-x))$.
3. Réciproquement, si, au voisinage de 1^-, $f(x) = o(ln(1-x))$, $(na_n)_n$ tend-elle vers 0 ?

Exercice 18. (Ecole Navale 2017) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: minorer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{tr}\,(A^p) z^p$ et exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A.