PSI **Septembre 2022**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Séries Numériques

1 Révisions de Sup

1.1 Définitions et Exemples

Exercice 1. 1. Convergence et somme de $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3-n}$.

2. Existence et somme de $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$.

3. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et donner sa somme.

1.2 Premières propriétés

Exercice 2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Exercice 3. Dans quels cas pour $\alpha > 0$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n}{1+\sqrt{n}}$ diverge grossièrement ?

Exercice 4. Justifier l'existence de $\forall n \geq \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Quelle est la nature de $(R_n)_n$?

Exercice 5. Donner la CNS sur $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$ pour que $\sum_{n\geq 0} r^n \cos(n\,\theta)$ et $\sum_{n\geq 0} r^n \sin(n\,\theta)$ convergent puis dans le cas de convergence, calculer la somme.

1.3 Les Séries de réels à termes positifs

Exercice 6. (CCINP) Déterminer la nature des séries suivantes :
(1) $\sum u_n$ où $u_n = \frac{1}{\sum\limits_{k=2}^{n} \ln k}$, (2) $\sum_{n\geqslant 1} (n^{\frac{1}{n^2}} - 1)$, (3) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4(\ln(n))^2}$
(4) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\ln(n))^2}{n^4}$, (5) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}$, (6) $\sum_{n\geqslant 1} (\sqrt{1+n^2+n} - \sqrt{n^2+n-1})$
(7) $\sum_{n\geqslant 2} (\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}})$, (8) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{1+n}}{n^\alpha}$, (9) $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1})\right)$, (10) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt[3]{n}}$
(11) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\sqrt{\ln(n)}}$, (12) $\sum_{n\geqslant 0} \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$*indication : calculer* $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$.

Exercice 7. (CCINP)

1. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $ln(x) = x - n$ a une solution unique dans $[1, +\infty[$ notée x_n.
2. Etudier la nature de $(x_n)_n$.
3. Etudier la nature de $\sum x_n^\alpha$ en fonction de α.

Exercice 8. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, g_n : t \mapsto \ln t - arctan(t) - n\pi$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \exists ! x_n \in \mathbb{R}, g_n(x_n) = 0$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > e^{n\pi}$
3. En déduire la nature de $\sum \frac{1}{x_n}$.

Exercice 9. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs et $\varepsilon > 0$. Montrer que les séries de termes généraux $u_n, \dfrac{u_n}{1+u_n}, \ln(1+u_n)$ et $\displaystyle\int_0^{u_n} \frac{1}{1+x^\varepsilon}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

Exercice 10. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

1. Justifier l'existence de R_n.
2. Montrer $(n+1)!R_n \to 1$ quand n tend vers $+\infty$.
3. En déduire la nature de $\sum\limits_{n\geq 0} \sin(n!2\pi e)$.

1.4 Relations entre suites et séries

Exercice 11. En utilisant la même méthode que pour montrer que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge, donner la nature de la suite de terme général :

$$\forall n \geq 1, u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{k+n}} \right) - n$$

Exercice 12. (Mines Télécom 2019)
Pour $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(2 - 3^{\frac{1}{k}}\right)$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge.
2. En considérant $\ln(u_n)$, donner la limite de $\ln(u_n)$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$, $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n^{\ln(3)}}$. *(Indication :Considérer $v_n = n^{\ln(3)}u_n$ et $w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$)*

Exercice 13.

1. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$.

   Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k v_k = U_n V_n - \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} V_k$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$ converge. (*pour u_n, choisir une suite dont la somme partielle est télescopique et égale à $\frac{1}{n}$*)
3. Déterminer la nature de la série de terme général $\sin n \sin \dfrac{1}{n}$

Exercice 14. 1. Trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + o(1)$.

3. On admet que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n)6 + \gamma + o(1)$.

   Montrer que $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(k}{k}$.

   En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

2 Les compléments de PSI

Exercice 15. Nature des séries : (1) $\sum u_n$ où $u_n = \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)}{n^n}$, (2) $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n - \ln n}$

(3) $\sum_{n \geqslant 1} \sin(n\pi + \frac{\pi}{n})$, (4) $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\ln n^n}{n!}$.

Exercice 16. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Justifier l'existence de R_n.
2. Montrer que $R_n + R_{n+1} = 2R_n - \frac{(-1)^n}{n+2}$ et $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
3. Donner un équivalent de R_n.
4. Nature de $\sum_{n \geq 0} R_n$.

Exercice 17. : (CCINP) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, On pose $H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que

$$e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}$$

Exercice 18. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$

Exercice 19. 1. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et donner sa somme.

2. Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Exercice 20. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ converge et déterminer une valeur approchée de sa somme à 10^{-3} près.

Exercice 21. : Donner la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$.

Exercice 22. Montrer que $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge et calculer sa somme.