Etude des suites arithmético-géométriques

1 Définition

Soit $p \in \mathbb{N}$. On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite $(u_n)_{n \geqslant p}$ de scalaires vérifiant une relation de la forme :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{K}^2,\ \forall n \geqslant p, u_{n+1} = a\, u_n + b$$

Cas particulier :

1. Si $a = 0$, $(u_n)_{n \geqslant p}$ est une suite constante à partir du rang p+1.
2. Si $a = 1$, $(u_n)_{n \geqslant p}$ est une suite arithmétique de raison b.
3. Si $b = 0$, $(u_n)_{n \geqslant p}$ est une suite géométrique de raison a.

2 Méthode pour déterminer son terme général

1. Si $a = 0$, $\forall n \geqslant p+1, u_n = u_{p+1} = b$.
2. Si $a = 1$, $\forall n \geqslant p, u_n = u_p + (n-p)b$.
3. Si $b = 0$, $\forall n \geqslant p, u_n = u_p\, a^{n-p}$.
4. Sinon :
   (a) On cherche la suite constante solution de cette relation de récurrence, c'est-à-dire, on cherche $l \in \mathbb{K}$ tel que $l = al + b$ qui existe car $a \neq 1$ et donc $l = \frac{b}{1-a}$.
   (b) On écrit le système :$\forall n \geqslant p$,
   $$\begin{cases} u_{n+1} &= a\, u_n + b \\ l &= a\, l + b \end{cases}$$
   On fait la différence entre les deux équations pour obtenir :
   $$\forall n \geqslant p, u_{n+1} - l = a\,(u_n - l)$$
   Posons la nouvelle suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \geqslant p, v_n = u_n - l$. La relation précédente nous dit que : $\forall n \geqslant p, v_{n+1} = a\, v_n$. Ainsi $(v_n)_{n \geqslant p}$ est une suite géométrique de raison a et
   $$\forall n \geqslant p, v_n = v_p a^{n-p}$$
   Ce qui donne
   $$\forall n \geqslant p, u_n = l + (u_p - l)\, a^{n-p}$$

Remarque : Ne pas apprendre la formule par coeur mais savoir la retrouver et adapter les formules suivant le premier terme de la suite.

3 Exercices d'application en Probabilité

Exercice 1. Un fumeur impénitent décide d'essayer de ne plus fumer. On admet que s'il ne fume pas un jour donné, alors la probabilité pour qu'il ne fume pas le lendemain vaut 0,3. Par contre, s'il succombe à son vice un jour donné, la probabilité pour qu'il ne fume pas le lendemain vaut 0,9. .
Notons, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, F_n l'évènement :la personne fume le jour n, et $p_n = P(F_n)$.
1. Trouver une relation entre p_n et p_{n+1}.
2. Calculer p_n en fonction de n et de p_1, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite $(p_n)_n$ converge et donner sa limite.

Exercice 2. Un gendarme va constater une suite illimitée d'infractions sur l'autoroute.
Chaque infraction peut être sanctionnée par une verbalisation ou un avertissement.
Il décide qu'il tirera au sort (avec une pièce de monnaie non truquée) la sanction pour la première infraction. Puis pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

— si pour la p-ième infraction constatée il verbalise, alors la $p+1$-ième fera l'objet d'un avertissement.
— si la p-ième infraction constatée fait l'objet d'un avertissement, alors il tire au sort pour la $p+1$-ième.

On note V_p l'événement :« la p-ième infraction constatée fait l'objet d'une verbalisation ». a_p sa probabilité et b_p celle de $\bar{V}_p$.

1. Exprimer a_{p+1} et b_{p+1} en fonction de a_p et b_p.
2. En déduire a_p et b_p pour tout p.
3. Déterminer la probabilité que ce gendarme ne fasse jamais de verbalisation.