**PSI** **Décembre 2022**
**MATHEMATIQUES**

## Feuille d'Exercices
## Suites et Séries de fonctions

**Exercice 1.** (CCINP 2019)

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonction $(f_n)_n$ où $f_n(x) = xe^{-\sqrt{n|x|}}$.
2. Calculer $\underset{x\in\mathbb{R}}{\text{Sup}}\, |f_n(x)|$. Qu'en déduit-on ?

**Exercice 2.**

1. Donner l'ensemble de définition de $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^x e^{-nx}$
2. Montrer que $S$ est continue sur son ensemble de définition.
3. Déterminer la limite de $S$ en $+\infty$

**Exercice 3.** On définit la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n nx^2}$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$
3. Proposer une démonstration directe de la non cv uniforme de $(f_n)_n$.

**Exercice 4.** Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

1. Donner le domaine de définition de $f$.
2. Donner le domaine de dérivabilité de $f'$. Calculer $f'$.
3. Que peut-on en déduire ?

**Exercice 5.** On considère $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$

1. Montrer que $S$ est définie sur $]-1,+\infty[$.
2. Monrer que $S$ est $C^1$ sur $I$ et donner ses variations.
3. Donner un équivalent à $S$ en -1.
4. Donner la limite en -1
5. Limite de $S$ en $+\infty$

**Exercice 6.** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que $F$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Par une comparaison série/intégrale, donner un équivalent de $F$ en $+\infty$.

**Exercice 7.**

1. Donner le Domaine de convergence $D$ de la série de fonctions $u_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n \ln n}$ définies pour $n \geq 2$.
2. Montrer que $S(x) = \frac{ln(x)}{x^2 ln(2)} + o(\frac{1}{x^2})$

3. Montrer que $S$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

**Exercice 8.** Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in ]0,1[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2-1}$ et $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$.

1. Montrer que $f$ et $f_n$ sont intégrables sur $]0,1[$.
2. On considère $I_n = \int_0^1 f_n(x)ds$. Montrer que $(I_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.
3. Calculer $I_{k+1} - I_k$ et en déduire que $I_n = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

**Exercice 9.** On définit une suite $(u_n)_n$ de fonctions sur $[0,1]$ par : $u_0(x) = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que pour $x \in [0,1]$, on a $0 \leq |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
2. En déduire que $(u_n)_n$ converge simplement vers une fonction $u$ non identiquement nulle
3. Démontrer la convergence uniforme de $(u_n)_n$ sur $[0,1]$
4. Montrer que $u$ est solution de $u'(x) = u(x - x^2)$.

**Exercice 10.** On pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$
2. Montrer que $I_n \sim \dfrac{\alpha}{n}$ où $\alpha = \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t} dt$

**Exercice 11.** (CCINP 2015)

La série de terme général $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa somme ?

**Exercice 12.** (CCINP 2015)

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^n}$ est convergente.
2. Montrer que $I = \int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t$ existe.
3. Montrer que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \int_0^1 t^n \ln^p(t)\,\mathrm{d}t$ existe et la calculer.
4. En déduire que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

**Exercice 13.**

1. $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2. Trouver une suite $(a_n)_n$ de rationnels strictement positifs telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

**Exercice 14.** (Mines 2015)

1. Domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$.
2. Montrer que $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer cette intégrale.

**Exercice 15.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+n^2}$.

# Problème

*Ce problème récapitule tout ce qu'il faut savoir faire sur les fonctions dzèta et mu* On considère les deux fonctions suivantes :

$$\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

$$\mu : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$

1. Donner leur domaine de définition.
2. Montrer qu'elles sont continues sur leur domaine de définition.
3. Montrer que'elles sont $C^\infty$ sur leur domaine de définition.
4. Montrer que les séries de fonctions définissant $\zeta$ et $\mu$ ne convergent pas uniformément sur leur domaine de définition.
5. Montrer que : $\forall x > 1, \mu(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.(*regrouper les termes pairs et impairs dans les sommes partielles*).
6. Calculer $\mu(1)$.
7. (a) Montrer que :
$$\forall x > 0, -1 + 2\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right]$$
   (b) En déduire :
$$\forall x > 0, \frac{1}{2} \leq \mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^{x+1}}$$
   (c) En déduire $\lim_{x \to 0^+} \mu(x)$.
8. Montrer que $\zeta$ est décroissante sur son domaine de définition.
9. Donner $\lim_{x \to +\infty} \mu(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x)$.
10. (a) Justifier que :
$$\forall x > 1, \forall n \geq 2, \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$$
   (b) En déduire : $\forall x > 1, \dfrac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \dfrac{1}{x-1}$.
   (c) En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ quand $x$ tend vers $1^+$.
   (d) Retrouver ce résultat en utilisant la relation du 4.
11. Donner l'allure de la représentation graphique de $\zeta$.