PSI **Octobre 2016**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Suites et Séries De Fonctions

Exercice 1. (CCP) Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2x^2+1}$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$
2. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$
3. Déterminer un intervalle I sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément.

Exercice 2. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si} \quad |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3. (CCP) Etudier les convergences de la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ où

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$

Exercice 4. Montrer que $S : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2x^2+n}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et C^1 sur $\mathbb{R}^+_*$.

Exercice 5. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.

Exercice 6. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7. (CCP)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2\ln(1+n)}$

1. Donner le domaine de convergence D de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$.
2. Soit $S(x)$ sa somme. Montrer que S est C^1 sur D^*.

Exercice 8. (CCP)
Ensemble de définition et continuité de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$. Donner un équivalent en 0^+ et sa limite en $+\infty$.

Exercice 9. Déterminer, si elle existe la limite de la suite général $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10. Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner le domaine de dérivabilité de f'. Calculer f'.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 11. Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$

Exercice 12. On définit une suite $(u_n)_n$ de fonctions sur $[0,1]$ par : $u_0(x) = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que pour $x \in [0,1]$, on a $0 \leq |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
2. En déduire que $(u_n)_n$ converge simplement vers une fonction u non identiquement nulle
3. Démontrer la convergence uniforme de $(u_n)_n$ sur $[0,1]$
4. Montrer que u est solution de $u'(x) = u(x-x^2)$.