PSI **Décembre 2023**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Suites et Séries de fonctions

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ où $f_n : x \mapsto e^{\frac{ix}{n}}$.

1. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ où $f_n : x \mapsto e^{\frac{ix}{n}}$.
   (a) Étudier la convergence simple de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}$, puis sur tout segment $[-a, a](a > 0)$ de $\mathbb{R}$
2. On pose pour $n \geq 1$:
$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} n^2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2x + 2n & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases} \end{array}$$
   (a) Tracer f_1, f_2, f_3.
   (b) Étudier la convergence simple de $(f_n)_n$.
   (c) Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$.

Exercice 2. (Mines-Pont 2019) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha + x^\alpha}$

1. Pour quelles valeurs de α la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$?
2. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}^+$?
   Convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
   Convergence uniforme sur certaines parties de $\mathbb{R}^+$?
3. Pour quelles valeurs de α la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 3. Pour $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{n}(x+n)}$.

1. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n
   converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On note f sa somme.
2. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est normalement convergente sur $[0, M]$ pour tout $M > 0$.
   Est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$?
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ puis qu'elle est dérivable et croissante sur $\mathbb{R}^+$.
4. Soit $n \geqslant 1$ et $x_0 \geqslant n \geqslant 1$. Montrer que $f(x_0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Interprétation ?

Exercice 4. On considère $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-x\sqrt{n}}$

1. Donner le domaine de définition de S.
2. Montrer que S est C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
3. Dresser son tableau de variations.
4. Retrouver le signe de S par une propriété sur les séries alternées.

Exercice 5. Pour $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n + n^2x}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. On note S sa somme.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xS(x)$ et en déduire un équivalent simple de S en $+\infty$.

Exercice 6. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x)=\frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$

   et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3. Donner une démonstration directe du fait que la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

Exercice 7. Soit $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Donner le domaine de définition de f. On le note D
2. Prouver que f est continue sur D
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Déterminer un équivalent simple de f en 0^+.

Exercice 8. Navale 2019 Soit $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$. .

1. Montrer que S est définie et continue sur $]0,+\infty$.
2. Limite de S en $+\infty$?
3. Limite de S en 0^+ , puis équivalent.

Exercice 9. (CCINP 2022) Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ une série complexe absolument convergente.

1. Calculer $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ où $n\in\mathbb{N}$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{a_n x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x\in\mathbb{R}$.
3. Pour x réel, on pose $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n x^n}{n!}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Exercice 10. Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$ des suites suivantes :

1. $\displaystyle\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t\right)_{n\geq 2}$.
2. $\displaystyle\left(\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geq 0}$ où f est une fonction continue sur $[0,1]$.

Exercice 11. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 12. Soit $x>0$ et $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

En utilisant $I_n(x)=\displaystyle\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$, montrer que

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

Exercice 13.

1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.
2. Plus généralement, démontrer que pour tout a et b strictement positifs,

$$\int_0^{+\infty}\frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(a+bn)^2}$$

Exercice 14. 1. (a) Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

2. En calculant de deux façons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x$, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}$.