Devoir Maison 2 - à remettre le 5 novembre

Ce devoir est à remettre par groupes (2 ou 3 élèves).
Soignez la rédaction et pensez à encadrer vos résultats.

Exercice n° 1

Pour tout entier n non nul, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n \, \mathrm{d}x$

1. a) Prouvez que $\forall x \in]1;e[, (\ln x)^{n+1} - (\ln x)^n < 0$
   b) En déduire le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   c) Prouvez que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2. a) Calculer I_1
   b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
   c) En déduire des valeurs approchées de I_2, I_3 et I_4 avec une précision de 10^{-3}.
3. a) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)I_n \leq e$.
   b) En déduire $\lim_n I_n$;
   c) Que vaut $\lim_n nI_n$?

Exercice n° 2

On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = (n+1)(u_n + u_{n+1}) \end{cases}$.

Déterminer une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Exercice n° 3

Soit $A(a), B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts du plan complexe.

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si, $a + jb + j^2c = 0$.
2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0$.