# Devoir Maison 11 - Vacances de Pâques

Ce devoir est à la carte : vous choisissez quels exercices vous souhaitez traiter !

Je les présente succinctement :
- Le premier exercice vise à revoir les fondamentaux sur les espaces vectoriels, il ne présente pas de difficulté particulière.
- Le deuxième exercice, toujours sur les espaces vectoriels, manipule les coordonnées (ce que l'on fera beaucoup d'ici la fin de l'année).
- Le troisième exercice est un exercice de probabilités.
- Le quatrième exercice permet de revoir un outil qui nous sera utile dans l'étude des séries.
- Le dernier exercice est une question ouverte ; il préfigure des notions que vous verrez en 2è année.

**Exercice n° 1**

On travaille dans $\mathbb{R}^4$ et on considère $F = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = y = 0 \text{ et } x + z = 0\}$.

a) Prouver que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

b) Donner une base de $F$, on la note $\mathcal{B}_F$.

c) Compléter $\mathcal{B}_F$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

d) On pose $\vec{u} = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{v} = (1; 2; 3; 4)$ er $\vec{w} = (-1; 0; -1; 0)$. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle libre ?

e) Soit $G = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Quelle est la dimension de $G$ ?

f) Donner une base de $F \cap G$.

g) Prouver que $F + G = \mathbb{R}^4$.

h) Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de $F$ et d'un vecteur de $G$ ?

**Exercice n° 2**

Soit $E = \{P \in \mathbb{C}_3[X] \ / \ (X^2 + 1) | P\}$.

a) Prouver que $E$ est un espace vectoriel de dimension finie, en donner une base $\mathcal{B}$.

b) Compléter $\mathcal{B}$ en une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{C}_3[X]$.

c) Donner les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ des polynômes de la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$.

**Exercice n° 3**

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardio-vasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour $J_n$, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant $J_{n+1}$ est 0.3 ; mais si elle a fumé un jour $J_n$, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant $J_{n+1}$ est 0.9 ; quelle est la probabilité $P_{n+1}$ pour qu'elle fume le jour $J_{n+1}$ en fonction de la probabilité $P_n$ pour qu'elle fume le jour $J_n$ ? Quelle est la limite de $P_n$ ? Va-t-il finir par s'arrêter ?

**Exercice n° 4**

On travaille dans le plan muni d'un repère.
Etudier les positions relatives des courbes $y = \frac{1}{1+x}$, $y = \sqrt{1 - 2\sin x}$, $y = \mathrm{e}^{-x}$ et $y = \cos(\sqrt{2}x)$ au voisinage de l'origine du repère.

**Exercice n° 5**

Existe-t-il une famille de fonctions $(f_n)_n$ de $\mathcal{C}([0, 1])$ telle que :

$$\forall x \in ]0; 1[, \ \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ \int_{[0;1]} f_n = 1$$

Si oui, proposer un exemple ; si non, expliquer pourquoi.