Devoir Maison 12 - Préparation au concours blanc

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, Id est l'application identité de E et $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.

Notation : soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$. (Notez que $f^2 \in \mathcal{L}(E)$).

I. Les projections : définitions et exemples

Définition
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un **projecteur** si, et seulement si, $p^2 = p$.

1. Justifiez qu'il existe au moins un projecteur de E.

   Dans la suite, p désigne un projecteur de E.
2. Pour tout $\vec{x} \in E$, prouver que $\vec{x} \in \text{Im } p$ si, et seulement si, $p(\vec{x}) = \vec{x}$.
3. Montrer que $\ker p \oplus \text{Im } p = E$.
4. Prouver que $q = Id - p$ est un projecteur. En déterminer le noyau et l'image.
5. Soit F et G deux sous-espaces de E qui sont supplémentaires dans E.
   Pour tout $\vec{x} \in E$ il existe une unique décomposition $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ avec $(\vec{x}_F, \vec{x}_G \in F \times G$.
   On note alors $p_1 : \vec{x} \mapsto \vec{x}_F$ et $q_1 : \vec{x} \mapsto \vec{x}_G$. On dit que p_1 est la projection sur F parallèlement à G et que q_1 est la projection sur G parallèlement à F ; (p_1, q_1) est un couple de projections associées. Les sous-espaces vectoriels F et G sont les éléments caractéristiques de p_1 et q_1.
   a) Prouver que p_1 est un endomorphisme de E. Que peut-on en déduire pour q_1 ?
   b) Vérifier que p_1 et q_1 sont des projecteurs.
   c) Caractériser F et G avec les images ou les noyaux de p_1 et q_1.
   d) En déduire que si $f \in \mathcal{L}(E)$, f est la projection sur Im (f) parallèlement à $\ker f$ si, et seulement si, f est un projecteur.
6. **Application numérique**
   Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère :
   $$D = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = z\} \quad \text{et} \quad P = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y = 0\}$$
   a) Vérifier que D et P sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ puis que $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$.
   b) Soit $\vec{u}(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $\vec{u}_D \in D$ et $\vec{u}_P \in P$ tels que $\vec{u} = \vec{u}_D + \vec{u}_P$.
   c) Déduire de la question précédente une expression analytique de la projection sur D parallèlement à P.
7. **Deuxième application**
   Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère l'application :
   $$\phi : (x; y; z) \longmapsto \frac{1}{10}(3x + 6y + 9z \ ; \ 2x + 4y + 6z \ ; \ x + 2y + 3z)$$
   a) Démontrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   b) Prouver que ϕ est une projection dont on donnera les éléments caractéristiques.

II. Lien entre projection et supplémentarité de l'image et du noyau

Dans cette partie, f est un élément de $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer l'équivalence : $\quad \ker f = \ker f^2 \iff \text{Im } f \cap \ker f = \{\vec{0}\}$.

2. Montrer l'équivalence : $\quad \mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ f^2 \iff \mathrm{Im}\ f + \ker f = E$.
3. Donner un exemple d'endomorphisme f qui ne soit pas un projecteur et pourtant tel que $\ker f$ et $\mathrm{Im}\ f$ soient supplémentaires dans E.

III. Commutabilité avec des projecteurs

Définition
Soit H un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que H est **stable** par f lorsque $f(H) \subset H$, autrement dit lorsque $\forall \vec{x} \in H,\ f(\vec{x}) \in H$.

Définition
Soit f et g deux endomorphismes de E. On dit que f et g commutent lorsque $f \circ g = g \circ f$.

1. Donner des exemples d'endomorphismes qui commutent avec un projecteur donné.
2. Soit p un projecteur de E, f un élément de $\mathcal{L}(E)$.
   Montrer que f et p commutent si, et seulement si, $\mathrm{Im}\ p$ et $\ker p$ sont stables par f.