4 heures

- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à $\boxed{\text{encadrer les résultats}}$. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées.
- Indiquez à la fin de chaque exercice le temps passé à y travailler.

Vrai ou Faux

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justier la réponse donnée. Toute réponse « vrai » ou « faux » non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension 3.
Il est possible de trouver des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ tels que $E = \mathrm{Vect}(\vec{a},\vec{b}) \oplus \mathrm{Vect}(\vec{c},\vec{d})$.

2. Si M et N sont deux matrices carrées de taille n qui sont inversibles, alors elles sont semblables.

3. Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}_2[X]$ qui vérifie $f \circ f = 0$. Alors, $\mathrm{rg}\ f = 1$.

4. Un élève répond au hasard aux cinq questions d'un questionnaire de type Vrai ou Faux. La probabilité qu'il ait exactement trois réponses correctes est égale à $\dfrac{10}{32}$.

5. On poursuit la question précédente. Dans le Vrai ou Faux, chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse est pénalisée de 0,5 points. La note moyenne à laquelle l'élève peut prétendre est 2 sur 5.

6. Une suite qui n'est pas monotone diverge.

7. Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

8. Si $\sum u_n$ converge alors $\sum u_{2n}$ converge aussi.

9. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\sum \dfrac{u_n}{n^2}$ converge aussi.

10. Si $\sum u_n$ converge alors $\sum |u_n|$ converge aussi.

Exercice de probabilités

On dispose d'un dé tétraèdrique équilibré dont les 4 faces sont numérotées de 1 à 4.
On lance trois fois le dé, on appelle M le maximum obtenu lors des trois lancés.

L'objectif de cet exercice est de calculer l'espérance de la variable aléatoire M.

1. Soit X_1 le résultat du premier lancé. Quelle est la loi de X_1 ? Donner la fonction de répartition F_1 de X_1, c'est-à-dire l'expression de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x)$.
2. Quelles sont les lois et les fonctions de répartition de X_2 et X_3, les variables aléatoires donnant les résultats des 2è et 3è lancés ? Quelles sont leurs fonctions de répartition ?
3. Soit F la fonction de répartition de M. Que vaut $F(x)$ lorsque $x < 1$? Lorsque $x > 4$?
4. Soit $x \in [1;4]$. Décrire l'événement $M \leq x$ à l'aide des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3.
5. En déduire $F(x)$ en fonction de $F_1(x)$; puis la loi de M.
6. Donner l'espérance de M.

Problème d'algèbre

On travaille dans $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère deux applications définies sur $\mathbb{R}_2[X]$:

$$f : P \longmapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \qquad \text{et} \qquad \phi : P \longmapsto P(1)$$

I - Etude de deux applications

1. Vérifier que f est un endomporphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner la matrice A de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. f est-elle injective ? surjective ?
4. Montrer que ϕ est linéaire, préciser l'espace d'arrivée.
5. Déterminer Im ϕ, en déduire la dimension de $\ker \phi$.
6. ϕ est-elle injective ? surjective ?
7. Donner une base de $\ker \phi$.

II - Puissances d'une matrice

1. Justifier que $\mathcal{B} = (1, -2X+1, 6X^2 - 6X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Donner la matrice de passage Q de la base canonique à $\mathcal{B}$, c'est-à-dire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathrm{can}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]})$.
4. Justifier que Q est inversible et calculer Q^{-1}.
5. Donner une relation matricielle entre A, B, Q et Q^{-1}.
6. Pour $n \geq 1$, calculer B^n, en déduire A^n.
7. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Pour $n \geq 0$, calculer $f^n(P)$ en fonction de a, b et c.
8. En déduire que : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \ \lim_{n \to +\infty} \phi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t$.

Problème d'analyse : étude de $\sum \frac{1}{n^2}$.

I. Résultats préliminaires

1. a) Prouver que, pour tous réels a et b, on a $\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$.

   b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant l'angle moitié $\frac{\theta}{2}$, factoriser $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

   c) On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ par : $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(2kx)$.

   En utilisant la fonction S_n définie sur $[0; \frac{\pi}{2}$ par $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2kx}$, ainsi que les deux formules vues dans les questions précédentes, démontrer que :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin((2n+1)x) - \sin(x)}{2\sin(x)} & \text{si } x \in]0; \frac{\pi}{2}] \\ n \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, fixé. Soit la fonction g définie que $]0; \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = \frac{ax+bx^2}{\sin(x)}$.

   a) Justifier que l'on peut prolonger g par continuité en 0, préciser la valeur qu'a alors $g(0)$.
   Dorénavant, on considère que g est définie et continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

   b) Démontrer que g est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

   c) Calculer $g'(x)$ en fonction de x et démontrer que g' est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ (c'est-à-dire que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$).

3. On note, pour tout entier naturel n non nul, $G_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x$.

   a) Justifier que G_n est bien défini.

   b) En utilisant une intégration par parties, prouver que $\lim_{n \to +\infty} G_n = 0$.

II. Nature et somme de $\sum \frac{1}{n^2}$

1. Justifier que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

   Dans la suite, on se propose de calculer la somme de $\sum \frac{1}{n^2}$, c'est-à-dire la limite $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

   a) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2kx)\ \mathrm{d}x$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(2kx)\ \mathrm{d}x$.

   b) Déterminer les réels a et b tels que l'on ait $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)\cos(2kx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4k^2}$.
   Dans la suite, le couple (a,b) a la valeur ainsi déterminée.

3. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2) f_n(x)\ \mathrm{d}x$.

4. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 2G_{2n+1} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)\ \mathrm{d}x$.

5. Déduire des questions précédentes la somme de $\sum \frac{1}{n^2}$.