Devoir Maison 3

Ce devoir est à traiter par binômes et à remettre le jeudi 7 décembre

Exercice n° 1

Soit un entier naturel p. L'objet de la méthode de Héron est de fournir une suite de nombres rationnels qui va converger vers le réel $\sqrt{p}$. On définit la suite de Héron de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = p \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{p}{u_n}}{2} \end{cases}$$

1. On fixe $p = 2$, on cherche à observer si la suite de Héron converge vers $\sqrt{2}$.
   a) Calculer les cinq premiers termes de la suite de Héron (de façon exacte, c'est-à-dire sous forme de fractions).
   b) Donner des valeurs approchées des termes calculés.
   c) Qu'en pensez-vous ? Comment qualifieriez-vous la convergence de la suite ?

2. Cas général : p est quelconque.
   a) Prouver que, pour tout entier n, on a $u_n \geq \sqrt{p}$.
   b) Prouver que la suite de Héron est décroissante, en déduire qu'elle converge.
   c) Prouver que la suite de Héron converge vers $\sqrt{p}$.

3. Proposer une fonction `heron(p,n)` qui, étant donnés deux entiers non nuls p et n renvoie le terme d'indice n de la suite de Héron obtenue pour l'entier p

4. On s'intéresse maintenant à la vitesse de convergence de la suite, c'est-à-dire à l'évolution de $|u_n - \sqrt{p}|$ en fonction de n.
   a) Prouver qu'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \sqrt{p}| \leq k|u_n - \sqrt{p}|$$
   b) Si u_n est une valeur approchée de $\sqrt{p}$ avec r décimales correctes ($r \in \mathbb{N}^*$), combien de décimales correctes aura u_{n+1} ?
   c) En déduire le nombre de termes à calculer pour passer d'une décimale correcte à 15 décimales correctes.