Mathématiques - Devoir Maison 6

À remettre par binômes le mardi 3 mars.

L'objet de ce devoir maison est de présenter les bases de l'**interpolation polynômiale** qui consiste à trouver un polynôme qui prend des valeurs voulues en un nombre fini d'endroits. Graphiquement, on cherche la courbe d'un polynôme qui passe par n points donnés.

Dans la suite, on travaille dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $A_1(x_1, y_1), \ldots, A_n(x_n, y_n)$ des points disctincts du plan ; on cherche une fonction polynômiale P dont la courbe représentative passe par tous les points A_i.

1. Supposons qu'il existe $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$. Le problème posé admet-il une solution ?

   Dans la suite, on supposera, quitte à renommer les points, que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

2. **Un exemple pour $n = 3$.**
   On considère les points $A_1(1,4), A_2(2,8)$ et $A_3(3,3)$.
   a) Trouver un polynôme P de degré 2 tel que la courbe représentative de P passe par les points $A_1,\ A_2$ et A_3.
   b) En modifiant les ordonnées des points, trouvera-t-on toujours une solution de degré 2 ?
   A-t-on toujours unicité du polynôme ?
   c) Construire trois polynômes $L_1,\ L_2$ et L_3, tous de degré 2 et qui vérifient, pour $(i,j) \in [\![1;3]\!]$, $L_i(j) = \delta_{i,j}$. (On rappelle que $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker).
   d) À l'aide de la question précédente, retrouver le polynôme P qui a été trouvé à la question a).

3. **Cas général**
   a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, trouver un polynôme L_i de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui s'annule en x_j pour tout $j \neq i$ et qui vérifie $P(x_i) = 1$.
   b) En déduire un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui vérifie $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

4. Les polynômes L_i sont les polynômes de Lagrange (Joseph-Louis Lagrange, mathématicien du XIXè siècle) ; le polynôme P construit est le polynôme interpolateur au sens de Lagrange pour les points A_i.
   Le fichier `interpolationLagrange7points.ggb` disponible sur le cahier de texte de la classe vous permet d'observer dans le logiciel GeoGebra (libre, multi-plateforme) le polynôme interpolateur pour 7 points (que vous pouvez déplacer). En les sélectionnant dans la partie gauche de la fenêtre, vous pouvez rendre visibles les courbes des polynômes L_i.
   Quelle critique pouvez-vous formuler sur l'interpolation lagrangienne ?

Pour ceux qui en veulent plus : exercice 8 de la fiche de Dénombrement.