Résolution Numérique d'Equations

1 Introduction

Certaines équations sont résolubles par le calcul, d'autres pas. Par exemple :

$$(E)\ :\ x^3 + 3x + 1 = 0$$

Nous disposons de résultats de cours nous assurant de l'*existence* de solutions mais qui ne permettent pas de les déterminer de façon exactes. Par exemple, comment prouver que (E) admet une unique solution réelle que l'on notera α ?

Dans ce type de situation, on doit se contenter d'une *solution approchée*, c'est-à-dire une valeur proche de la solution.
Par exemple, $0,3$ est une solution approchée de (E). Est-elle *satisfaisante* ?

La résolution numérique d'équation a pour objectif de fournir une valeur approchée satisfaisant une précision donnée, dans le cas d'une équation que l'on ne sait pas résoudre de façon exacte.

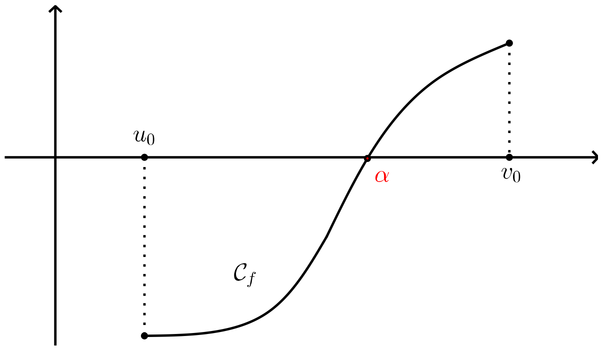
Dans ce document, on va présenter deux méthodes classiques de résolution numérique : la méthode de la dichotomie et la méthode de Newton. Dans un premier temps, on va les présenter de façon intuitive et les mettre en oeuvre. Dans un second temps, on donnera des éléments théoriques qui expliquent la rapidité de convergence de la méthode de Newton.

2 Dichotomie

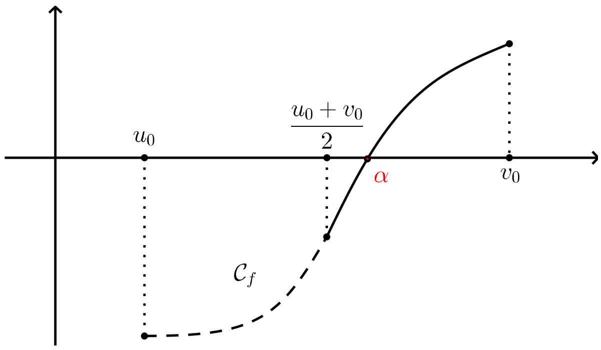
2.1 Principe

On cherche à approcher α, solution de $f(x) = 0$ pour une certaine fonction f avec une précision $\varepsilon > 0$.

— Etape 1 : on prend un intervalle $[u_0; v_0]$ tel que α soit dans cet intervalle. On peut s'en assurer simplement : il suffit que $f(u_0)$ et $f(v_0)$ soient de signe contraire.



— Etape 2 : on découpe l'intervalle en deux et on conserve la moitié dans laquelle se trouve α :



Sur cet exemple, on prendra donc : $u_1 =$ et $v_1 =$.

— Etape 3 : on recommence jusqu'à ce que

— Etape 4 : on fournit comme valeur approchée $\alpha \simeq$

2.2 Mise en oeuvre

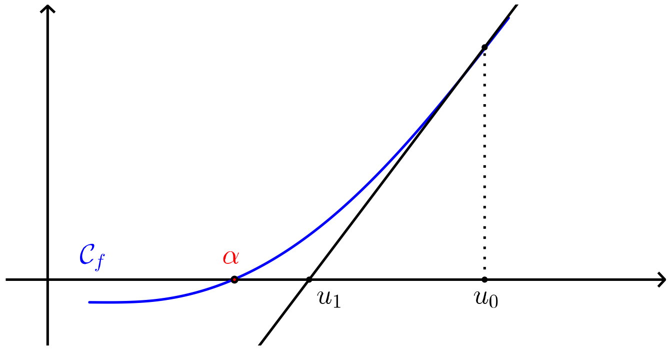
Programmez une fonction `dichotomie(f,u0,v0,epsilon)` qui fournit la valeur approchée de la solution de `f(x)=0` avec une précision `epsilon` obtenue à l'aide de l'algorithme de la dichotomie en partant de `u0` et `v0`.

3 Méthode de Newton

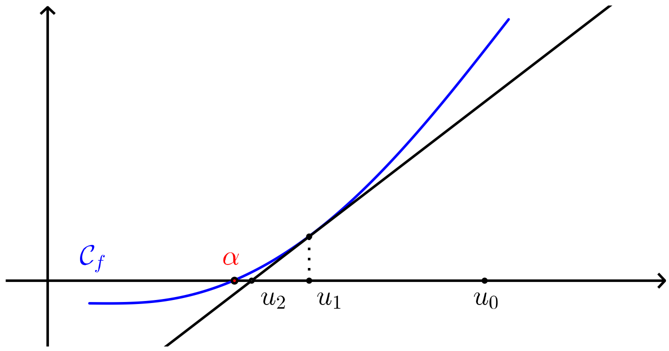
3.1 Principe

On cherche toujours à approcher α la solution de $f(x) = 0$, f est supposée régulière.

On part d'un nombre u_0, on prend comme approximation suivante le point d'intersection de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse u_0 avec l'axe des abscisses :



Puis, on recommence :



a) Quelle est l'équation de la tangente menée à-partir du point d'abscisse u_0 ?

b) Quelle est l'expression de u_1 ?

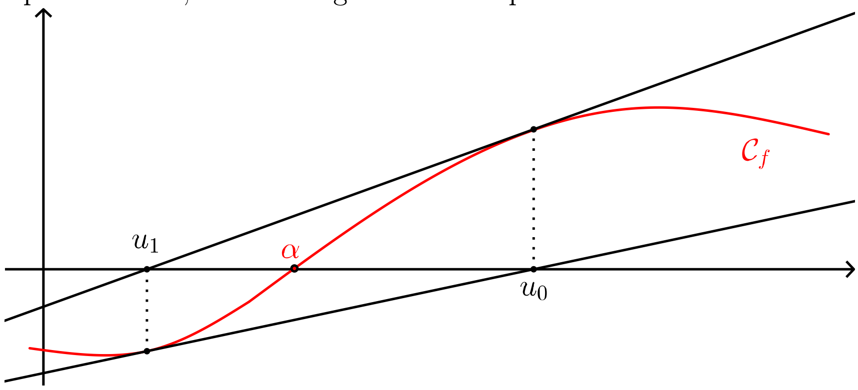
3.2 Mise en oeuvre

4 Comparaison des deux méthodes

- Vitesse de convergence :
  — **la convergence de la dichotomie est d'ordre 1(assez lente)** : l'erreur est divisée par deux à chaque étape.

  — **La convergence de la méthode de Newton est d'ordre 2, ou quadratique (rapide)** : on double le nombre de chiffres corrects à chaque étape.

- Limites de la méthode de Newton :
  — **la convergence vers la solution n'est pas assurée !**
  L'algorithme peut boucler, voire diverger. Par exemple :



  Ce type de problème est lié à un premier terme trop éloigné de α.

  — **Il faut connaitre f'.**
  Sinon on approche la tangente par la sécante, mais ça abaisse la vitesse de convergence.

En pratique, on essaiera au maximum d'utiliser la méthode de Newton. La convergence est assurée dès que u_0 est suffisamment proche de α, on peut éventuellement produire un u_0 qui convient en se servant de la méthode de la dichotomie.

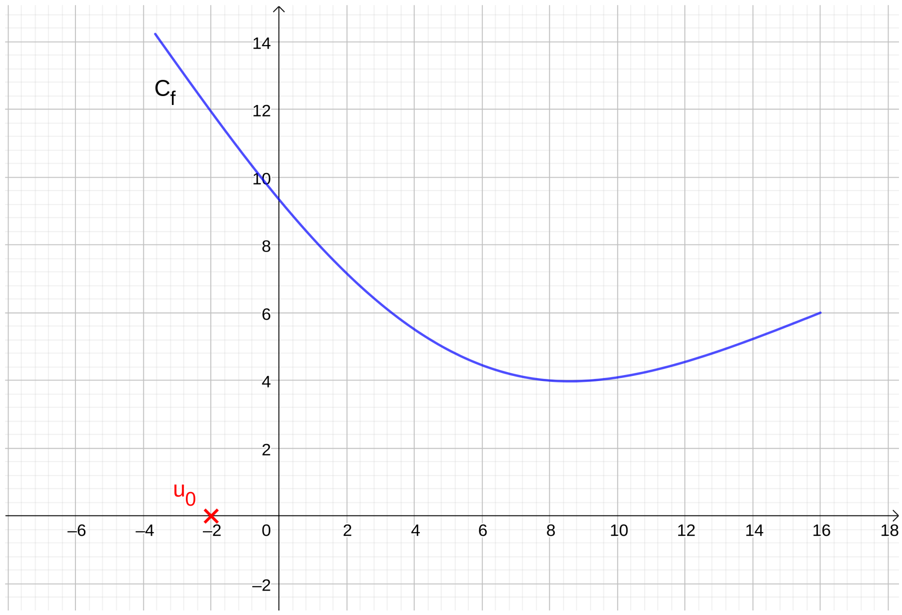
5 Elements de théorie pour comprendre l'efficacité de la méthode de Newton

5.1 Points fixes attractifs, points fixes répulsifs

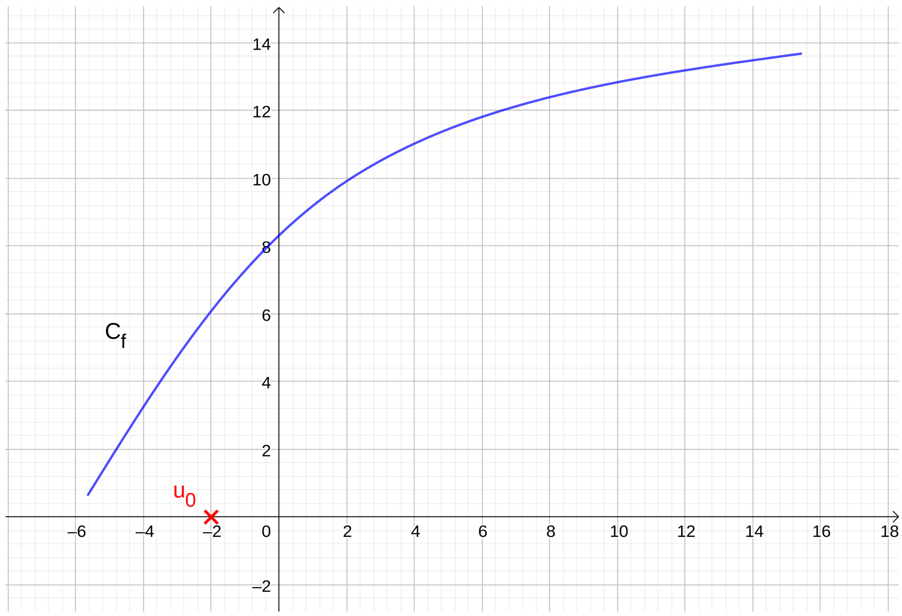
> **Définition**
> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On appelle **point fixe** de f toute solution de $f(x) = x$.

Soit u une suite définie par récurrence avec une relation du type : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Nous avons vu que, si la fonction f est continue, et que la suite converge, cette limite est nécessairement un point fixe de f.

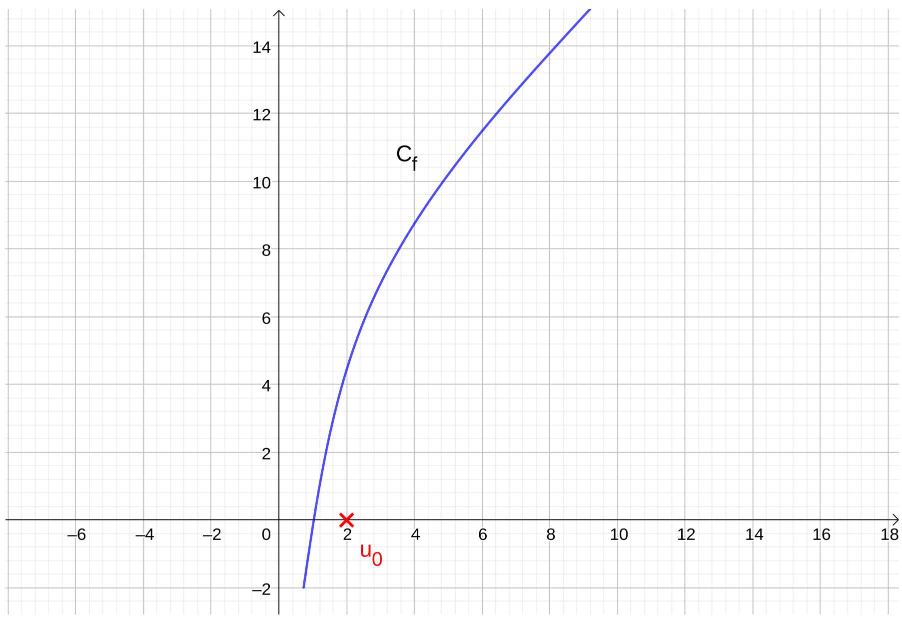
Illustrons cette propriété par quelques figures sur lesquelles construire les premiers termes de la suite (u_0 est indiqué).



C_f
u_0



C_f
u_0



C_f
u_0

Essayons de comprendre ce que ces différents exemples ont laissé entrevoir.
On se place dans le cas d'une fonction régulière, mettons de classe $\mathcal{C}^\infty$ (on pourrait demander moins), soit α un point fixe de f.

f est dérivable en α, f' est continue et on peut envisager plusieurs cas :

- Si $|f'(\alpha)| < 1$ alors il existe un réel $0 < M < 1$ et un voisinage V de α sur lequel $|f'| < M$.

  Si u_0 est dans V alors

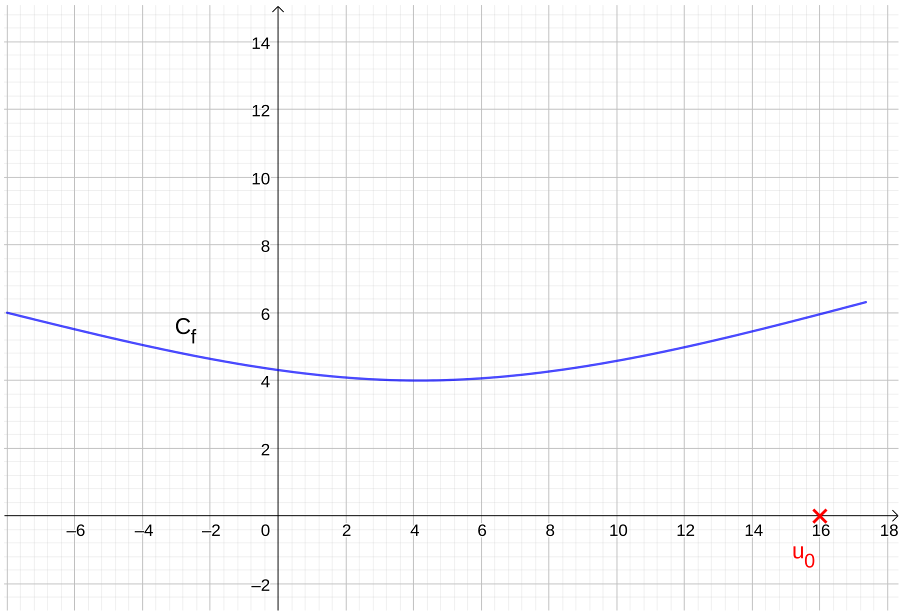
- Si $|f'(\alpha)| > 1$ alors

Il reste deux cas possibles :

- Si $|f'(\alpha)| = 1$ alors on ne peut rien dire : ça dépend de f. Sur certains exemples on aura des points attractifs, sur d'autres des points répulsifs.

  À titre d'exemples :
  — pour $f = \sin$, 0 est attractif si on prend $u_0 = 1$;
  — pour $f = \exp -1$, 0 est réuplsif si on prend $u_0 = 1$.

- Si $f'(\alpha) = 0$ alors



5.2 La méthode de Newton : créer un point super-attractif

On cherche à approcher α, solution de $f(x) = 0$, avec f régulière et $f'(\alpha) \neq 0$).

On considère la fonction $\phi : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ (qui est bien définie sur un voisinage de α car

On a : $\phi(\alpha) =$ et $\phi'(\alpha) =$

- α est un point super-attractif de ϕ.
- La suite des itérés $u_{n+1} = f(u_n)$ a une convergence quadratique *(très rapide)* vers α

  à condition que