Intégration Numérique

1 Introduction

Lorsqu'on a une intégrale à calculer, il faut des circonstances particulières pour qu'on soit en mesure d'en donner la valeur exacte :

-
-
-

Sinon, on peut toujours envisager une valeur approchée. On discutera la qualité des approximations à travers plusieurs aspects : leur précision, mais aussi la quantité de ressources nécessaire pour les fournir.

Dans la suite, $[a;b]$ désignera un intervalle, f une fonction continue sur $[a;b]$ et $I = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ l'intégrale qu'on cherche à approcher.

2 Point de vue « analyse numérique »

2.1 Principe général des méthodes d'intégration numérique

a) On prend une **subdivision** de l'intervalle $[a;b]$:

Les subdivisions que l'on va considérer seront **régulières**, c'est-à-dire de **pas** constant.

b) On utilise la relation de Chasles pour « découper » I :

c) On approche f par une fonction *simple* sur chaque intervalle $[x_i;x_{i+1}]$.
Ceci nous permet de fournir une approximation de $\displaystyle\int_{[x_i;x_{i+1}]} f$.

Cette étape s'appelle **méthode élémentaire**, elle se résume à choisir par quel type de fonction approcher f.

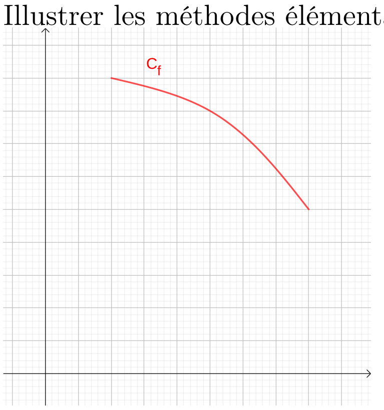
d) Le choix d'une méthode élémentaire étant fait, on le reproduit sur chaque intervalle et on obtient une valeur approchée de I. Cette étape s'appelle **méthode composée**.

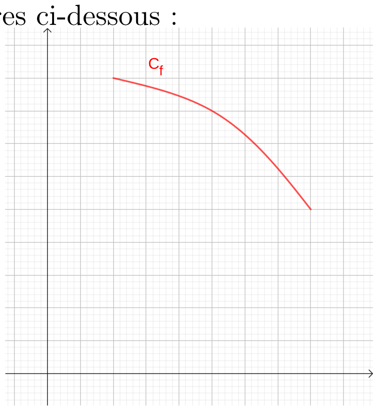
2.2 Méthodes des rectangles

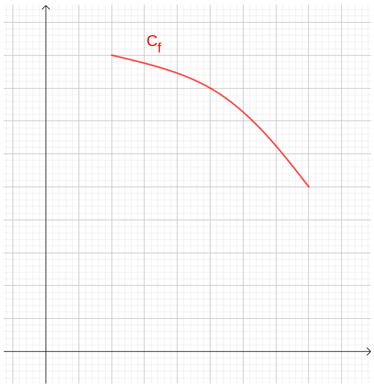
Il s'agit d'approcher f par une fonction constante sur chaque intervalle $[x_i;x_{i+1}]$. Il y a trois façons usuelles de choisir :

-
-
-

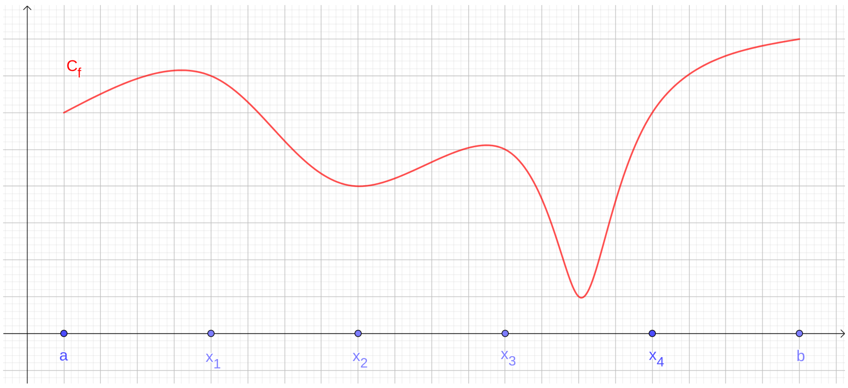
Illustrer les méthodes élémentaires ci-dessous :

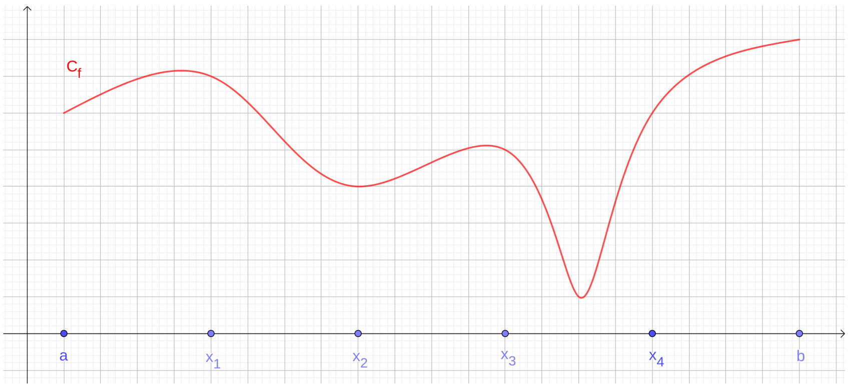






Sur les courbes ci-dessous, avec les subdivisions indiquées, illustrer les méthodes composées qu'on obtient avec les rectangles à gauche et le point milieu.

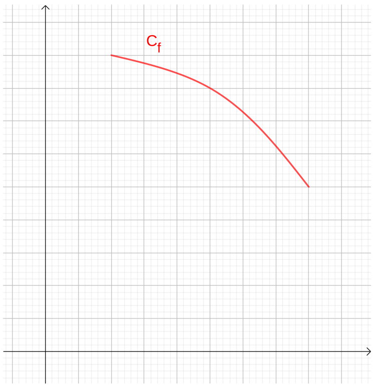


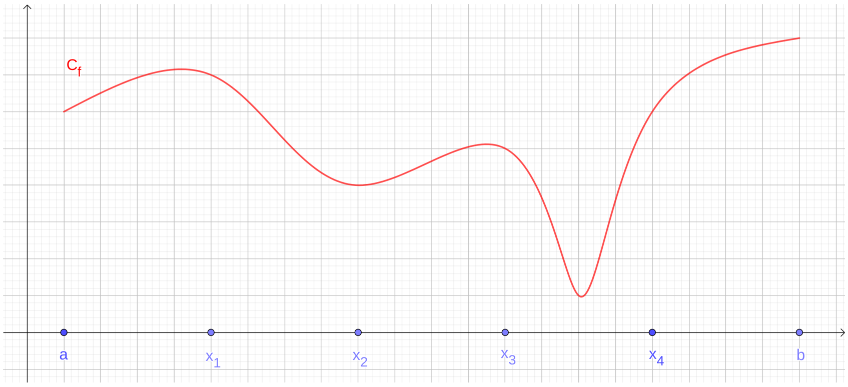


> **Exercice**
> Programmer les méthodes des rectangles à gauche et du point milieu.

Remarque : les méthodes des rectangles consistent à approcher f par des **fonctions en escalier**. Les sommes qu'on calcule alors sont des **sommes de Riemann**

2.3 Méthode des trapèzes

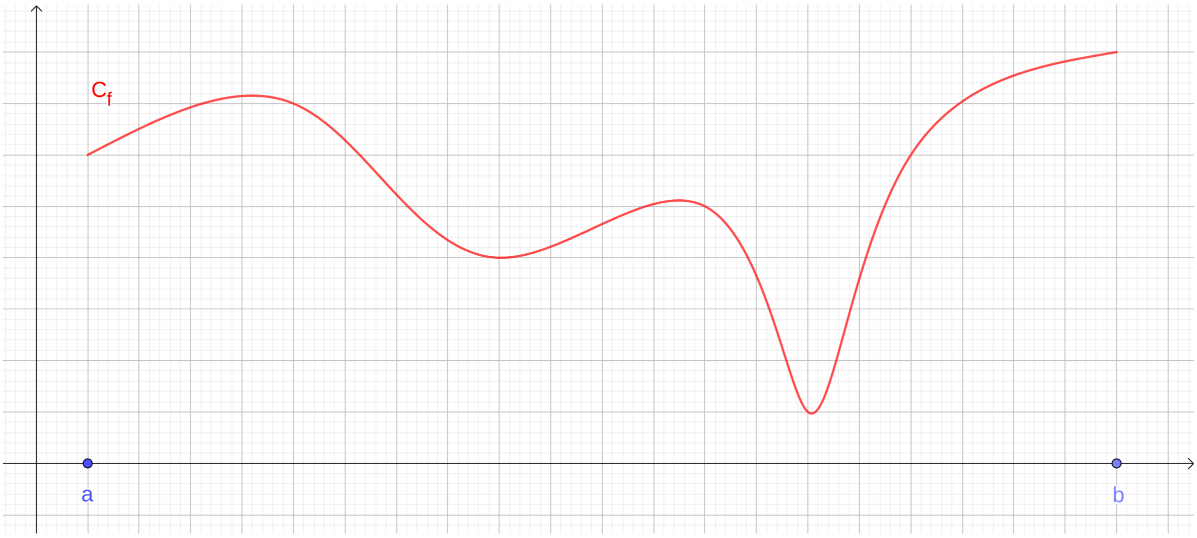




Exercice
Programmer la méthodes des trapèzes.

3 Une approche différente : la Méthode de Monte Carlo

$I = \int_a^b f(t)\ dt$ est aussi l'intégrale de la fonction constante égale à la **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$:



Si on choisit au hasard n points x_i dans $[a; b]$, la moyenne de leurs images sera une bonne approximation de la valeur moyenne de f sur $[a; b]$. C'est un cas particulier de la **loi forte des grands nombres**.

Exercice
En utilisant le module random, programmer la méthode de Monte-Carlo.

4 Qualité d'une méthode d'intégration numérique

4.1 Ordre d'une méthode d'intégration

Définition
On dit qu'une méthode d'intégration est d'ordre $n \geq 0$ lorsqu'elle est exacte pour tous les polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n.

Proposition

- Les méthodes des rectangles sont d'ordre

- La méthode des trapèzes est d'ordre

- La méthode de Monte-Carlo est d'ordre

On peut augmenter l'ordre d'une méthode d'intégration autant qu'on le souhaite, c'est le principe des **méthodes de Newton-Cotes** dont les méthodes du point milieu et des trapèzes en sont les premiers exemples (aux ordres 0 et 1). En pratique, on se limite souvent à l'ordre 3 (qui s'appelle **méthode de Simpson**).

4.2 Erreur commise par les méthodes d'intégration numérique

Dans le cas des méthodes d'analyse numérique, chaque méthode élémentaire revient à approcher la fonction f sur un *petit* intervalle par un polynôme. L'erreur commise dans cette approximation créera l'erreur de la méthode d'intégration.

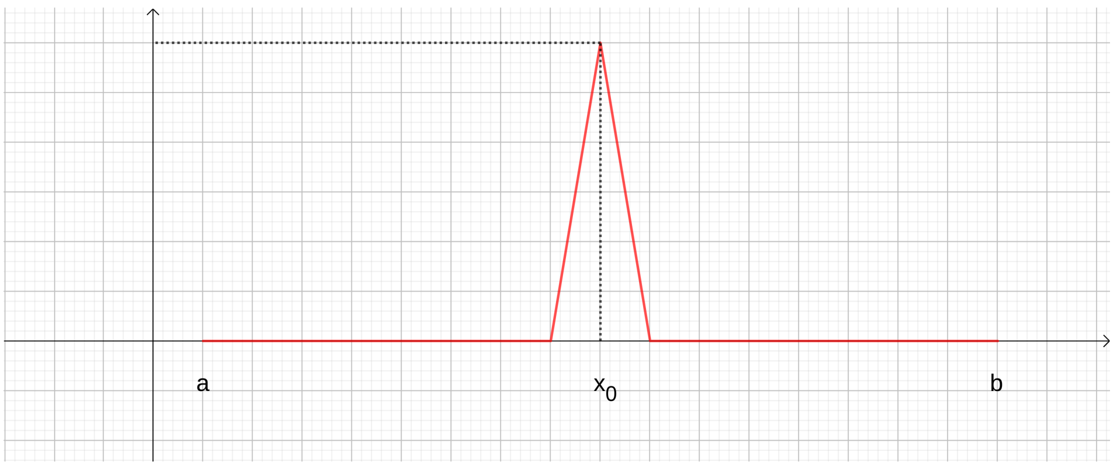
Or, on dispose de résultats sur l'approximation d'une fonction régulière par un polynôme :

En l'utilisant on peut majorer les erreurs commises avec les différentes méthodes qu'on a vu. On rappelle que n désigne le nombre de *petits* intervalles avec lesquels on a partagé le *grand* intervalle $[a;b]$ et que la *norme infinie* d'une fonction, notée $\|.\|_\infty$ désigne le maximum de sa valeur absolue.

- la méthode des rectangles à gauche a une erreur inférieure à $\dfrac{(b-a)^2}{2n}\|f'\|_\infty$;
- la méthode du point milieu a une erreur inférieure à $\dfrac{(b-a)^3}{24n^2}\|f''\|_\infty$;
- la méthode des trapèzes a une erreur inférieure à $\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|_\infty$.

Concernant la méthode Monte Carlo, l'approche de l'erreur commise est différente :

- Imaginons une fonction qui soit presque une « impulsion »atteinte en un point x_0 et que la fonction soit nulle hors d'un voisinage de x_0 :



Dans la situation indiquée, $I =$

Or, si les valeurs prises au hasard sont toutes égales à x_0, on obtiendra comme valeur approchée de l'intégrale :

On voit donc que l'augmentation du nombre de points de garantit pas la convergence *a priori*... sauf que

— Le **théorème de la limite centrale** nous permet de donner un ordre de grandeur de l'erreur commise : elle est comparable à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

4.3 « Coût » de la mise en œuvre des méthodes d'intégration numérique

Concernant les méthodes d'analyse numérique, les coûts sont proches, indépendemment de l'ordre.

a) Par exemple, pour la méthode du point milieu : la méthode élémentaire consomme trois opérations (calcul du milieu, de son image par f puis produit par le pas). La méthode composée a donc un coût de $3n$.

b) La méthode élémentaire des trapèzes coûte 5 opérations (deux calculs d'image, leur somme, le produit par le pas, la division par 2) et donc la méthode composée $5n$.
Si on est astucieux, on peut se ramener à $3n$:

Si le coût des méthodes d'analyse numérique n'augmente pas de façon drastique, pourquoi ne pas prendre un ordre très élevé ?

Concernant la méthode de Monte Carlo,