Devoir Maison 10 - Correction

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 / x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz = 0\}$. E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$?

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$.

$$(x, y, z) \in E \iff x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz = 0 \iff (x + y)^2 + (y + z)^2 = 0 \ : (\star)$$

Il y a alors deux possibilités :

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors, un carré est positif et la somme de deux nombres positifs est nulle si, et seulement si, ces deux nombres positifs sont nuls. On a donc :

  $$(\star) \iff x + y = 0 \text{ et } y + z = 0 \iff (x, y, z) = x(1, -1, 1)$$

  On en déduit que $E = \text{Vect}((1, -1, 1))$ et donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors :

  $$(\star) \iff (x + y)^2 - (\mathrm{i}(y + z))^2 = 0 \iff (x + y + \mathrm{i}y + \mathrm{i}z)(x + y - \mathrm{i}y - \mathrm{i}z) = 0$$

  Dans $\mathbb{C}$, un produit est nul si, et seulement si, un au moins des facteurs est nul. On a donc :

  $$(\star) \iff x + y(1 + \mathrm{i}) + \mathrm{i}z = 0 \text{ ou } x + y(1 - \mathrm{i}) - \mathrm{i}z = 0 \iff x = y(-1 - \mathrm{i}) - \mathrm{i}z \text{ ou } x = y(-1 + \mathrm{i}) + \mathrm{i}z$$

  On en déduit que $E = \text{Vect}((-1 - \mathrm{i}, 1, 0), (-\mathrm{i}, 0, 1)) \cup \text{Vect}((-1 + \mathrm{i}, 1, 0), (\mathrm{i}, 0, 1))$.
  E est donc la réunion de deux plans vectoriels distincts, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ car il n'est pas stable par combinaison linéaire. (Par exemple $(-\mathrm{i}, 0, 1)$ et $(\mathrm{i}, 0, 1)$ sont dans E, mais leur somme $(0, 0, 2)$ n'y est pas).