PCSI, Mathématiques - Corrigé du DM10

Problème 3

Préliminaire

1. Leibniz : soit f et g sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$. On a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$$

2. On met u en facteur et on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{u-t} &\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{u(1-\frac{t}{u})} = \frac{1}{u}(1+(\frac{t}{u})+(\frac{t}{u})^2+\cdots+(\frac{t}{u})^n+o(t^n)) \\ &\underset{t\to 0}{=} \boxed{\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}t+\cdots+\frac{1}{u^{n+1}}t^n+o(t^n)}\end{aligned}$$

Partie I : nombres de Fibonacci

1. $f(t)$ existe si, et seulement si, $1-t-t^2 \neq 0 \iff t \notin \{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\}$.

   I est un intervalle ouvert contenant 0 donc $\boxed{I = \left]\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}), \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\right[}$.

2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, la $\boxed{\text{formule de Taylor Young}}$ nous garantit l'existence de développements limités à tous ordres en 0.

3. f_0, f_1, f_2 et f_3 sont les coefficients du polynôme de Taylor de f en 0. Pour les obtenir, il ne faut surtout pas dériver mais plutôt calculer un développement limité et procéder par identification :

$$\begin{aligned}f(t) = \frac{1}{1-(t+t^2)} &\underset{t\to 0}{=} 1+(t+t^2)+(t+t^2)^2+(t+t^2)^3+o((t+t^2)^3) \\ &\underset{t\to 0}{=} 1+t+2t^2+3t^3+o(t^3)\end{aligned}$$

   On identifie : $\boxed{f_0 = f(0) = 1}$, $\boxed{f_1 = \frac{f'(0)}{1!} = 1}$, $\boxed{f_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = 2}$, $\boxed{f_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = 3}$.

4. Remarquons que par définition $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 1+1 = 2$, $\varphi_3 = 1+2 = 3$. Les deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coincident donc pour les premiers termes, pour montrer leur égalité on va vérifier qu'elles satisfont à la même relation de récurrence. Deux méthodes sont possibles, soit en calculant la dérivée d'ordre n (supposé ≥ 2) en 0 de $t \mapsto (1-t-t^2)f(t)$ à l'aide de la formule de Leibniz soit en raisonnant directement avec des développements limités. Utilisons les développements limités :

$$(1-t-t^2)f(t) \underset{t\to 0}{=} (1-t-t^2)(f_0+f_1t+\cdots f_nt^n+o(t^n))$$

   Ce développement de f suffit pour obtenir un développement à l'ordre n du produit. Le terme en t^n de ce produit vient de f_nt^n multiplié par 1, de f_{n-1} multiplié par $-t$, de $f_{n-2}t^{n-2}$ multiplié par $-t^2$ soit

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2}$$

   Comme par définition de f la fonction $t \mapsto (1-t-t^2)f(t)$ est constante égale à 1, en utilisant l'unicité du développement limité, on obtient bien

$$\forall n \geq 2, \quad f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0 \iff f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

   $\boxed{\text{Les suites } (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont donc égales}}$.

5. On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$ ou 1 la formule est vérifiée. Supposons la vérifiée pour $n-1$ et $n-2$. En ajoutant ces deux relations, on obtient

$$1+(\varphi_0+1)+(\varphi_1+\varphi_0)+\cdots+(\varphi_{n-1}+\varphi_{n-2}) = \varphi_{n+1}+\varphi_n$$

ce qui donne, en tenant compte de la relation de définition :

$$1+\underbrace{2}_{\varphi_0+\varphi_1}+\varphi_2+\varphi_3+\cdots+\varphi_n=\varphi_{n+2}.$$

Finalement, $\boxed{\text{on a bien } 1+\varphi_0+\varphi_1+\cdots+\varphi_n=\varphi_{n+2} \text{ pour tous les entiers } n}$.

6. (a) On applique la méthode du cours : $\forall t\in\mathbb{R},\ t^2+t-1=(t-\frac{-1+\sqrt5}{2})(t-\frac{-1-\sqrt5}{2})$ et donc, il existe des réels λ et μ tels que, pour tout $t\in I$ on ait :

$$\frac{1}{t^2+t-1}=\frac{\lambda}{t-\frac{-1+\sqrt5}{2}}+\frac{\mu}{t-\frac{-1-\sqrt5}{2}}$$

En multipliant les deux membres par t^2+t-1 il vient :

$$1=\lambda(t+\frac{1+\sqrt5}{2})+\mu(t+\frac{1-\sqrt5}{2})\iff\begin{cases}\lambda+\mu=0\\ \lambda-\mu=\frac{2}{\sqrt5}\end{cases}\iff\begin{cases}\lambda=\frac{1}{\sqrt5}\\ \mu=-\frac{1}{\sqrt5}\end{cases}$$

Finalement, on a : $\boxed{\forall t\in I,\ \frac{1}{t^2+t-1}=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1}{t-\frac{-1+\sqrt5}{2}}-\frac{1}{t-\frac{-1-\sqrt5}{2}}\right)}$

(b) En utilisant la question précédente, on identifie et $u=\frac{-1+\sqrt5}{2}$, $v=\frac{-1-\sqrt5}{2}$,$\alpha=\frac{1}{\sqrt5}$ et $\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$ conviennent.

(c) D'après ce qui a été vu précédemment, φ_n est le coefficient de t^n dans un développement limité de f à un ordre supérieur à n. La fonction f se décompose en une somme de deux fonctions dont on connait les développements limités (préliminaire). On en déduit :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \varphi_n=(\frac{1}{\sqrt5})\frac{1}{(\frac12(-1+\sqrt5))^{n+1}}+(-\frac{1}{\sqrt5})\frac{1}{(\frac12(-1-\sqrt5))^{n+1}}.$$

Comme $\frac{1}{\frac12(-1-\sqrt5)}=\frac12(1-\sqrt5)$ et $\frac{1}{\frac12(-1+\sqrt5)}=\frac12(1+\sqrt5)$, on a finalement :

$$\boxed{(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}=\frac{1}{\sqrt5}\left((\frac12(1+\sqrt5))^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}}+-\frac{1}{\sqrt5}\left((\frac12(1-\sqrt5))^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

PARTIE II : nombres de dérangements.

1. Ici encore, il vaut mieux multiplier deux développements limités usuels puis utiliser la formule de Taylor et l'unicité d'un développement pour calculer d_0, d_1, d_2, d_3.
On a, d'une part : $\frac{e^{-t}}{1-t}\underset{t\to0}{=}d_0+d_1^t+\frac{d_2}{2}t^2+\frac{d_3}{6}t^2.$
D'autre part :
$$\begin{aligned}\frac{e^{-t}}{1-t}&\underset{t\to0}{=}(1-t+\frac12t^2-\frac16t^3+o(t^3))(1+t+t^2+t^3+o(t^3))\\&\underset{t\to0}{=}1+(1-1)t+(1-1+\frac12)t^2+(1-1+\frac12-\frac16)t^3+o(t^3)\\&\underset{t\to0}{=}1+\frac12t^2+\frac13t^3+o(t^3)\end{aligned}$$
On en déduit, par identification : $\boxed{d_0=1}$, $\boxed{d_1=0}$, $\boxed{d_2=1}$, $\boxed{d_3=2}$.

2. Il est évident que $\boxed{\delta_1=0}$. La seule permutation d'un ensemble à un élément est l'identité ; ce n'est pas un dérangement.
Pour un ensemble à deux éléments, il y a deux permutations : l'identité (qui n'est pas un dérangement) et la permutation qui échange les deux éléments (qui en est un). On a donc $\boxed{\delta_2=1}$.
Pour un ensemble à trois éléments, il y a 6 permutations. L'identité et les trois permutaions qui échangent deux éléments en laissant le troisième fixe ne sont pas des dérangements. Les deux dernières (qu'on appelle des permutations circulaires) sont des dérangements ; on a donc $\boxed{\delta_3=2}$.

3. On a : $\forall t<1,\ e^tg(t)=\frac{1}{1-t}\underset{t\to0}{=}1+t+t^2+\cdots+t^n+o(t^n)$

Ce développement est unique, il coïncide avec celui obtenu par la formule de Taylor-Young, soit par identification : $\frac{(e^t g)^{(n)}(0)}{n!} = 1$. Le calcul de la dérivée d'ordre n se fait à l'aide de la formule de Leibniz. Toutes les dérivées de exp valent 1 en 0, celles de g sont les d_k donc :

$$1 = \frac{(e^t g)^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} d_k = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!} d_k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\frac{d_k}{k!}$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout entier } n\text{, on a bien } 1 = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\frac{d_k}{k!}.}$.

4. Les suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coïncident pour les premières valeurs de n, montrons que $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence prouvée à la question précédente pour en déduire l'égalité des deux suites.
Soit un ensemble E de cardinal n et classons les permutations de E suivant leur nombre de points fixes. Soit k entre 0 et n, quel est le nombre de permutations de E avec exactement $n-k$ points fixes ?
Une permutation laissant fixes tous les points d'une partie donnée est un dérangement du complémentaire de cette partie. Il y a donc δ_k permutations laissant fixes tous les points d'une partie donnée de E à $n-k$ éléments et, puisqu'il y a $\binom{n}{n-k}$ parties de E à $n-k$ éléments, il $\binom{n}{n-k}\delta_k$ permutations laissant fixes $n-k$ éléments de E.
Comme il y a $n!$ permutations de E, on en déduit : $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k} d_k$.
En exprimant les coefficients du binome avec des factorielles et en simplifiant par $n!$ on obtient la même relation qu'à la question précédente.
Finalement, une récurrence immédiate nous permet de conclure $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ d_n = \delta_n}$.

5. On vérifie facilement que $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{1}{1-t}\right) = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}}$. Utilisons la formule de Leibniz pour calculer $\delta_n = d_n$:

$$d_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k! = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\ \boxed{= n!\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}}$$

(Dans les sommes, on a posé $k' = n-k$, puis on est revenu à la notation k et avoir supprimé les deux premiers termes qui s'annulent.)