

Exercice d'algèbre

1. Le polynôme nul vérifie $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$, c'est donc un élément de E . Vérifions que E est stable par combinaison linéaire : soit $(P, Q) \in E^2$ ainsi que $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et notons $R = \lambda P + \mu Q$. On a :

$$R(1) = (\lambda P + \mu Q)(1) - (\lambda P + \mu Q)'(1) = \lambda \underbrace{(P(1) - P'(1))}_{=0 \text{ car } P \in E} + \mu \underbrace{(Q(1) - Q'(1))}_{=0 \text{ car } Q \in E} = 0.$$

On a donc $R \in E$.

Finalement, E est non-vide et stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Remarque : on peut aller plus vite en remarquant que $E = \ker(\phi)$ avec ϕ la forme linéaire définie sur $\mathbb{K}[X]$ par $\phi(P) = P(1) - P'(1)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $X^n + \alpha_n X + \beta_n \in E \iff 1 + \alpha_n + \beta_n = n + \alpha_n \iff \beta_n = n - 1$

b) $P_n = X^n + n - 1$ est un polynôme de degré n qui est dans E .

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(P_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une famille échelonnée et donc libre de n vecteurs de E .

Le cardinal des familles libres de E n'est donc pas majoré, ce qui implique que E est de dimension infinie.

4. On pose $F = E \cap \mathbb{K}_3[X]$.

(a) $1 \in \mathbb{K}_3[X]$ mais $1 \notin E$ donc $1 \notin F$ et donc $F \neq \mathbb{K}_3[X]$. F est un sous-espace de $\mathbb{K}_3[X]$ différent de $\mathbb{K}_3[X]$ donc $\dim(F) < \dim \mathbb{K}_3[X]$, c'est-à-dire $\dim(F) < 4 : (1)$.

(b) (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de F donc $\dim(F) \geq 3 : (2)$. On déduit de (1) et (2) que $\dim(F) = 3$.

(c) $\dim(\mathbb{K}_3[X]) = 4$ et $\dim(F) = 3$, les supplémentaires de F dans $\mathbb{K}_3[X]$ sont des droites vectorielles. On a $1 \notin F$ donc $\text{Vect}(1) \cap F = \{0\}$ ce qui prouve que $\text{Vect}(1)$ et F sont en somme directe. $\text{Vect}(1) = \mathbb{K}_0[X]$ est une droite vectorielle, c'est donc un supplémentaire de F dans $\mathbb{K}_3[X]$.

(d) La famille (P_1, P_2, P_3) est libre dans F . Puisque son cardinal est $3 = \dim(F)$, c'en est une base. De même, (1) est une base de $\mathbb{K}_0[X] = \text{Vect}(1)$.

La famille $(P_1, P_2, P_3, 1)$ est donc une base de $\mathbb{K}_3[X]$ adaptée à $F \oplus G = \mathbb{K}_3[X]$.

Problème : une chaîne de Markov

1. a) Au bout de 1 tirage, on a eu un seul numéro, il suit que $a_1 = 1, b_1 = c_1 = d_1 = 0$.

b) Au bout de deux tirages, on a eu en tout un ou deux numéros donc $c_2 = d_2 = 0$.

Les conditions de l'expérience (remise, boules indiscernables) font qu'il y a équiprobabilité sur l'univers qui est $\llbracket 1; 4 \rrbracket^2$.

A_2 est réalisé si, et seulement si, on a obtenu deux fois la boule 1, ou deux fois la boule 2, ou deux fois la boule 3, ou deux fois la boule 4. On a donc $|A_2| = 4$ et $a_2 = \frac{|A_2|}{16} = \frac{1}{4}$.

On a $a_2 + b_2 = 1$ donc on déduit $b_2 = \frac{3}{4}$.

- c) A_n est réalisé si, et seulement si, on tire n fois la même boule.

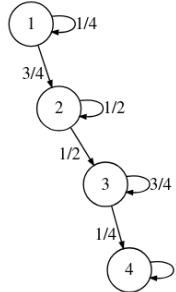
On a donc $a_n = \frac{|A_n|}{\text{Card}(\llbracket 1; 4 \rrbracket^n)} = \frac{4}{4^n} = \frac{1}{4^{n-1}}$.

d) On cherche $\mathbb{P}_{B_3}(B_2)$. La formule de Bayes donne : $\mathbb{P}_{B_3}(B_2) = \frac{\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}_{B_2}(B_3)}{\mathbb{P}(B_3)}$.

Or, $\mathbb{P}(B_2) = \frac{3}{4}$ et $\mathbb{P}_{B_2}(B_3) = \frac{1}{2}$. On a : $\mathbb{P}(B_3) = 1 - a_3 - c_3 - d_3$ avec $a_3 = \frac{1}{16}$, $d_3 = 0$ et c_3 est la probabilité de tirer trois boules différentes en trois tirages : $c_3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{4^3} = \frac{6}{16}$ donc $b_3 = \frac{9}{16}$.

Finalement, $\mathbb{P}_{B_3}(B_2) = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{9}{16}} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

2. a) Le diagramme complété :



b) Par définition, les événements A_n, B_n, C_n et D_n sont disjoints et leur union vaut l'univers ; autrement dit : (A_n, B_n, C_n, D_n) est bien un système complet d'événements.

c) Pour tout n de \mathbb{N}^* , on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n, D_n) , puis les probabilités composées :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap C_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap D_n) \\ &= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(D_n)\mathbb{P}_{D_n}(A_{n+1}). \\ &= \frac{1}{4}a_n + 0 + 0 + 0 \end{aligned}$$

En procédant de façon analogue pour les événements B_{n+1}, C_{n+1} et D_{n+1} on obtient $U_{n+1} = AU_n$.

3. a) On applique la méthode du cours et on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Le calcul donne $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) On a $D = P^{-1}AP \iff A = PDP^{-1}$.

Par récurrence, on montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = PD^nP^{-1}$.

d) Par une récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4^n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{3}{4})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

Il suit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3(2^n - 1) & 2^n & 0 & 0 \\ 3(1 - 2^{n+1} + 3^n) & -2^{n+1} + 2 \times 3^n & 3^n & 0 \\ -1 + 3 \times 2^n - 3^{n+1} + 4^n & 2^n - 2 \times 3^n + 4^n & 4^n - 3^n & 4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ donc, par une récurrence immédiate on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = A^{n-1}U_1$. Or,

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \frac{1}{4^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3(2^{n-1} - 1) \\ 3(1 - 2^n + 3^{n-1}) \\ -1 + 3 \times 2^{n-1} - 3^n + 4^{n-1} \end{pmatrix}.$$

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n, b_n, c_n et d_n sont les coefficients de U_n donc on a :

$$a_n = \frac{1}{4^{n-1}}, \quad b_n = \frac{3(2^{n-1} - 1)}{4^{n-1}}, \quad c_n = \frac{3(1 - 2^n + 3^{n-1})}{4^{n-1}}, \quad d_n = \frac{-1 + 3 \times 2^{n-1} - 3^n + 4^{n-1}}{4^{n-1}}$$

Après simplifications :

$$a_n = \frac{1}{4^{n-1}}, \quad b_n = \frac{3}{2^{n-1}} - \frac{3}{4^{n-1}}, \quad c_n = \frac{3}{4^{n-1}} - \frac{6}{2^{n-1}} + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}, \quad d_n = -\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{3}{2^{n-1}} - 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 1$$

b) Les expressions trouvées font intervenir des suites géométriques dont les raisons sont dans $]0; 1[$, elles tendent toutes vers 0. On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 1$.

Ces limites signifient qu'au bout d'un grand nombre de lancers, on aura presque sûrement eu les quatre numéros.