Problème d'algèbre - Endomorphismes cycliques

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Pour tout endomorphisme u de E, on note $u^0 = Id_E$ et, pour tout entier naturel k, $u^{k+1} = u^k \circ u$. (Notez que u^k est un endomorphisme de E).

Si $Q(X) = q_0 + q_1 X + \cdots + q_m X^m \in \mathbb{K}[X]$, on pose pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$Q(u) = q_0 Id_E + q_1 u + \cdots + q_m u^m$$

(Notez que $Q(u)$ est un endomorphisme de E).

Définition
On dit d'un endomorphisme u de qu'il est cyclique s'il existe un vecteur $\vec{x} \in E$ tel que :

$$E \ = \ \text{Vect}(u^k(\vec{x}) \ / \ k \in \mathbb{N}) \ = \ \text{Vect}(\vec{x}, u(\vec{x}), u^2(\vec{x}), \dots).$$

I. Des exemples

1. Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}^3$ et $u : (x, y, z) \longmapsto (6z, x - 11z, y + 6z)$.
   a) Prouver que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
   b) Calculer $u(1, 0, 0)$ et $u^2(1, 0, 0)$.
   c) u est-il cyclique ?
2. Dans cette question, n est un entier naturel non nul fixé ; on prend $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $u : P \longmapsto P'$.
   a) On considère $Q = X^3 + 5X^2 + X - 1$. Déterminer $u^k(Q)$ selon $k \in \mathbb{N}$.
   b) u est-il cyclique ?
3. Dans cette question, $\dim E \geq 2$ et u est un endomorphisme nilpotent d'indice $p \geq 2$, c'est-à-dire que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
   a) Montrer qu'il existe $\vec{x} \in E$ tel que $(\vec{x}, u(\vec{x}), \dots, u^{p-1}(\vec{x}))$ est libre.
   Que peut-on en déduire sur p ?
   b) En déduire que u est cyclique si, et seulement si, $p = n$.
   c) Donner un exemple d'espace de dimension 3 et d'endomorphime u qui convienne (c'est-à-dire nilpotent d'indice 3).

II. Cas général

Dans cette partie, on note $n = \dim E (\geq 1)$ et u est un endomorphisme cyclique de E. On fixe $\vec{x} \in E$ tel que $E = \text{Vect}(u^k(\vec{x}) / k \in \mathbb{N})$.

1. a) Prouver que la famille $(\vec{x}, u(\vec{x}), \dots, u^n(\vec{x}))$ est liée.
   b) Prouver qu'il existe un entier p, maximal, tel que la famille $(\vec{x}, u(\vec{x}), \dots, u^p(\vec{x}))$ soit libre.
   c) Montrer que $u^{p+1}(\vec{x}) \in \text{Vect}(\vec{x}, u(\vec{x}), \dots, u^p(\vec{x}))$.
   d) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $u^k(\vec{x}) \in \text{Vect}(\vec{x}, u(\vec{x}), \dots, u^p(\vec{x}))$.
   e) En déduire que $(\vec{x}, u(\vec{x}), \dots, u^p(\vec{x}))$ est une base de E puis la valeur de p.
2. a) Justifier l'existence de $(p_0, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$u^n(\vec{x}) = p_0 \vec{x} + p_1 u(\vec{x}) + \cdots + p_{n-1} u^{n-1}(\vec{x}).$$

   Dans la suite, on posera $P(X) = X^n - p_{n-1} X^{n-1} - \cdots - p_1 X - p_0 \in \mathbb{K}[X]$.

b) Déterminer l'image par l'endomorphisme $P(u)$ des vecteurs de la base $(\vec{x}, u(\vec{x}), \dots, u^{n-1}(\vec{x}))$.
En déduire la nature de $P(u)$.

On dit que P est un **polynôme annulateur** de u.

c) Montrer que $(u^0, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

d) En déduire que :
- il n'existe aucun polynôme $Q \neq 0$ de degré strictement inférieur à n tel que $Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$;
- P est l'unique polynôme unitaire de degré n tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

P est appelé **le polynôme minimal** de u.

e) Application : déterminerr le polynôme minimal de l'endomoprhisme u vu à la question I.1).