Devoir Maison 14

Exercice de probabilités

On dispose d'un dé tétraèdrique équilibré dont les 4 faces sont numérotées de 1 à 4.

On lance trois fois le dé, on appelle M le maximum obtenu lors des trois lancés et on cherche à calculer l'espérance de la variable aléatoire M.

1. Soit X_1 le résultat du premier lancé. Quelle est la loi de X_1 ? Donner la fonction de répartition F_1 de X_1, c'est-à-dire l'expression de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x)$.
2. Quelles sont les lois et les fonctions de répartition de X_2 et X_3, les variables aléatoires donnant les résultats des 2è et 3è lancés ? Quelles sont leurs fonctions de répartition ?
3. Soit F la fonction de répartition de M. Que vaut $F(x)$ lorsque :
   a) $x < 1$? b) $x > 4$?
4. Soit $x \in [1;4]$. Décrire l'événement $M \leq x$ à l'aide des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3.
5. En déduire $F(x)$ en fonction de $F_1(x)$; puis la loi de M.
6. Donner l'espérance de M.

Problème d'algèbre

On travaille dans $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère deux applications définies sur $\mathbb{R}_2[X]$:

$$f : P \longmapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \qquad \text{et} \qquad \phi : P \longmapsto P(1)$$

I - Etude de deux applications

1. Vérifier que f est un endomporphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner la matrice A de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. f est-elle injective ? surjective ?
4. Montrer que ϕ est linéaire, préciser l'espace d'arrivée.
5. Déterminer Im ϕ, en déduire la dimension de $\ker \phi$.
6. ϕ est-elle injective ? surjective ?
7. Donner une base de $\ker \phi$.

II - Puissances d'une matrice

1. Justifier que $\mathcal{B} = (1, -2X+1, 6X^2-6X+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Donner la matrice de passage Q de la base canonique à $\mathcal{B}$.
4. Justifier que Q est inversible et calculer Q^{-1}.
5. Donner une relation matricielle entre A, B, Q et Q^{-1}.
6. Pour $n \geq 1$, calculer B^n, en déduire A^n.
7. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Pour $n \geq 0$, calculer $f^n(P)$ en fonction de a, b et c.
8. En déduire que : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \lim\limits_{n \to +\infty} \phi(f^n(P)) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t$.