Mathématiques - Correction du Devoir Maison 14

On cherche à trouver tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(X^2-1) = P(X+1)P(X-1)\ : (\star)$.

Analyse : Supposons qu'il existe un polynôme non constant P qui vérifie la relation $(\star)$.

1. Justifier l'existence de $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) = 0$.
   Si le polynôme P est non constant, le théorème de D'Alembert-Gauss assure qu'il possède au moins une racine complexe a.
2. Prouver que a^2+2a et a^2-2a sont également des racines de P.
   On évalue la relation $(\star)$ en $X = a+1$: $P((a+1)^2-1) = P(a+2)P(a) = 0$ car a est racine de P. $(a+1)^2-1 = a^2+2a$ est donc racine de P.
   On procède de façon analogue en $X = a-1$ et on obtient que a^2-2a est racine de P.
3. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : $\begin{cases} a_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n \end{cases}$
   Justifier que tous les termes de la suite sont des racines de P.
   En utilisant la question précédente, par une récurrence immédiate on obtient que tous les termes de la suite sont racines de P.
4. (a) Si $a \in \mathbb{R}^{+*}$, que dire des variations de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire que a n'est pas un réel strictement positif.
   Si $a > 0$ alors, on a clairement $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$ puis $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} > a_n$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante. Cela est absurde : le polynôme P est non nul et ne peut pas avoir une infinité de racines distinctes.

   (b) Justifier que a ne peut pas être un réel strictement négatif.
   Si $a < 0$ est racine de P alors, d'après la question 2., a^2-2a est une racine de P qui est strictement positive. Or, la question précédente a permis d'établir que P ne peut pas avoir de racine strictement positive. Finalement, $a < 0$ est exclu.
5. Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + 1 = (a+1)^{2^n}$.
   Par récurrence. Pour $n = 0$, c'est évident. Si $a_n + 1 = (a+1)^{2^n}$ alors :
   $$a_{n+1} + 1 = a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n+1)^2 = ((a+1)^{2^n})^2 = (a+1)^{2^{n+1}}$$
   La propriété est donc héréditaire et vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Déduire de la question précédente que $|a+1| = 1$.
   On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + 1 = (a+1)^{2^n}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n+1| = |a+1|^{2^n}$. Cette suite de nombres positifs est strictement croissante si $|a+1| > 1$ et strictement décroissante si $0 < |a+1| < 1$. Dans ces deux cas, la suite $(|a_n+1|)_n$ a une infinité de termes distincts ce qui implique qu'il existe une infinité de a_n distincts. Or, d'après la question 3. tous les a_n sont racines de P ; il est donc exclu qu'il y en ait une infinité.
   On a donc $|a+1| \in \{0; 1\}$, on exclut $|a+1| = 0$ car on a vu que $a \notin \mathbb{R}^{-*}$ à la question 4.(b).
   Finalement, $|a+1| = 1$.
7. On admet qu'on a également $|a-1| = 1$; quelles sont les valeurs possibles pour a ?
   Géométriquement, $|a+1| = 1$ signifie que, dans le plan complexe, le point $A(a)$ est sur le cercle de centre $B(-1)$ et de rayon 1. De façon analogue, $|a-1| = 1$ entraine que $A(a)$ est sur le cercle de centre $C(1)$ et de rayon 1. Ces deux cercles ont un unique point commun : $O(0)$, on en déduit que $a = 0$.

Synthèse : Conclure.

Tout d'abord, les polynômes constants qui vérifient $(\star)$ sont 0 et $1 = X^0$. Ensuite, d'après ce qu'on a vu, un polynôme non constant qui vérifie $(\star)$ a comme seule racine 0, cela implique qu'il est de la forme λX^n avec $(\lambda, n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{N}^*$. En appliquant $(\star)$ on a $\lambda^2 = \lambda$ ce qui implique $\lambda = 1$ (puisque $\lambda \neq 0$).
Finalement, l'ensemble des polynômes qui vérifient $(\star)$ est $\{X^n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.