Mathématiques - Devoir Maison 15 - version difficile

À remettre par binômes ou de façon individuelle le mardi 28 avril.

Le devoir sera remis sous forme d'un unique ficher .pdf que vous pouvez produire facilement à l'aide d'une application sur smartphone (CamScanner sur android ou Scannable sur iOs, par exemple).

Méthode du point milieu pour approcher $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)\, \mathrm{d}t$, vitesse de convergence

On note, pour tout $t \in [0;\pi]$, $g(t) = \sin(t^2)$.

1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;\sqrt{\pi}]$. Donner un majorant de $|g''(t)|$ sur $[0;\sqrt{\pi}]$.

2. Dans cette question, on introduit des notations qui seront utilisées dans la suite.
   Pour $n \geq 1$, soit la subdivision régulière de $[0;\sqrt{\pi}]$ qui comporte $n+1$ points que l'on note $\alpha_0 < \cdots < \alpha_n$. Pour $i \in [\![0;n]\!]$, que vaut α_i ?
   Pour $i \in [\![0;n-1]\!]$, on note β_i le milieu de chaque intervalle $[\alpha_i;\alpha_{i+1}]$.
   Exprimer β_i en fonction de α_i et α_{i+1}.

3. On utilise la méthode du point milieu avec $n \geq 1$ rectangles pour approcher $\int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)\, \mathrm{d}t$.
   Exprimer, à l'aide des notations introduites, l'approximation $I(n)$ obtenue.

4. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral sur chaque intervalle $[\alpha_i;\alpha_{i+1}]$ au point β_i, prouver que :
$$\forall n \geq 1, \quad \left| \int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)\, \mathrm{d}t \;-\; I(n) \right| \;\leq\; \pi\sqrt{\pi}\, \frac{2+4\pi}{24n^2}$$

5. Pour quel valeur de $n \geq 1$ est-on alors certain que l'erreur faite dans l'approximation de $\int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)\, \mathrm{d}t$ par la méthode du point milieu est inférieure à 10^{-4} ?

6. En utilisant Python, donner cette valeur approche à 10^{-4} près de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)\, \mathrm{d}t$.

Jusqu'en 2010, quatre écoles des Mines recrutaient en fin de Maths Sup, on les désignait jusque-là par « petites » Mines. Ce sujet est adapté d'une épreuve de ce concours. (Il correspond à peu près au quart d'une épreuve de 4h).