PCSI, Mathématiques - Corrigé du DM 1

Fonctions cosinus hyperbolique (ch), sinus hyperbolique (sh) et tangente hyperbolique (th)

Ces fonctions font partie des nouvelles fonctions de référence, il est donc important de traiter cet exercice en entier et de bien le comprendre. En fin d'exercice vous trouverez les courbes représentatives de ces courbes.

1. ch et sh sont bien définies sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$. On en déduit que $\boxed{\text{ch est paire et sh est impaire}}$.
   Il suit qu'il suffit de les étudier sur $\mathbb{R}^+$ *(on pourrait tout aussi bien choisir $\mathbb{R}^-$).*
2. ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaisons linéaires (et composées) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. En appliquant les formules de dérivation on obtient : $\boxed{\mathrm{ch}' = \mathrm{sh} \text{ et } \mathrm{sh}' = \mathrm{ch}}$.
   (La seule difficulté est de bien dériver e^{-x}).
3. On a $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ et il est clair que $\mathrm{ch} > 0$ *(voyez-vous bien pourquoi ?)* donc <u>sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$</u>. La parité de sh nous permet de limiter son étude à $\mathbb{R}^+$ et on a uniquement la limite en $+\infty$ à déterminer. *(Voyez-vous pourquoi, sans calcul, on peut affirmer que sh* $(0) = 0$ *?)* On a :

   $$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

   On en déduit, par opérations sur les limites, que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty}$ On dresse le tableau de variations de sh sur $\mathbb{R}^+$ et on le complète à $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
sh	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

4. On a $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$. Or, le tableau de variations de sh obtenu à la question précédente nous donne son signe.

   On a $\boxed{\mathrm{ch}(0) = 1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty}$ ce qui nous permet de construire le tableau de variations de ch sur $\mathbb{R}^+$ puis de le compléter à $\mathbb{R}$ (par parité) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
sh		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

5. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = (\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x))(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^0 \boxed{= 1}$.
6. D'après la question précédente, ch ne s'annule jamais. Il suit que $\mathrm{th}(x)$ existe pour tout réel x. De plus, ch et sh étant dérivables, on déduit que <u>la fonction th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$</u>.
   ch est paire et sh est impaire, on en déduit que <u>la fonction th est impaire</u>. *(Voyez-vous bien pourquoi ?)*
   On a :

   $$\mathrm{th}' = \frac{\mathrm{sh}'\mathrm{ch} - \mathrm{sh}\mathrm{ch}'}{\mathrm{ch}^2} = \frac{\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2}{\mathrm{ch}^2} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2} > 0.$$

   On en déduit que <u>la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$</u>. On calcule la limite en $+\infty$:

   $$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} = 1.$$

   (Quelle opération a-t-on fait ? Pourquoi a-t-on eu besoin de le faire ? Voyez-vous bien pourquoi le résultat est 1 ?).
   On peut contruire le tableau de variations de th (d'abord sur $\mathbb{R}^+$ puis complété par imparité) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
th	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1