Devoir Maison 3 - corrigé

Exercice n° 1

Grâce à la formule de récurrence, on calcule les premiers termes de la suite :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 6,\ u_4 = 24.$$

On formule la conjecture suivante : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n!}$

Prouvons cette conjecture par récurrence <u>sur deux indices</u> sur n.

— **Initialisation :** les calculs des premiers termes prouvent que la propriété est vraie pour $n \in [\![0;4]\!]$ (et donc pour $n = 0$ et $n = 1$), la propriété est donc bien initialisée.

— **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété soit vraie aux rangs n et $n+1$, c'est-à-dire : $u_n = n!$ et $u_{n+1} = (n+1)!$.
Montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+2$. On a : $u_{n+2} = (n+1)(u_n + u_{n+1}) = (n+1)(n! + (n+1)!) = (n+1)n!(n+2) = (n+2)!$.

— **Conclusion :** la propriété est initialisée, elle est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n° 2

1. Le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est obtenu du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.
En termes d'affixes complexes, cela correspond à : $c - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b-a) \iff c + a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} - 1) - b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 0$.
Or, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} - 1 = \mathrm{j}$. En divisant la dernière équation par j on obtient que ABC est équilatéral direct si, et seulement si, $a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0$.
2. ABC est équilatéral si, et seulement si, il est équilatéral direct ou indirect. Le premier cas correspond à $a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0$; le second correspond à ce que CBA soit équilatéral direct, c'est-à-dire $c + b\mathrm{j} + a\mathrm{j}^2 = 0$.
On a donc :
$$\begin{aligned}(ABC \text{ est équilatéral }) &\iff a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0 \text{ ou } c + b\mathrm{j} + a\mathrm{j}^2 = 0\\ &\iff (a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2)(c + b\mathrm{j} + a\mathrm{j}^2) = 0\\ &\iff a^2 + b^2 + c^2 - (ac + ab + bc) = 0.\end{aligned}$$
(Pour obtenir la dernière équation, on a utilisé la propriété $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$).
Finalement, ABC est équilatéral si, et seulement si, $a^2 + b^2 + c^2 - (ac + ab + bc) = 0$.