Devoir Maison 3 - corrigé de la partie Renforcement

1. On a $x^3 - 2x^2 \leq x - 2 \Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)(x-1) \leq 0$.
   On construit le tableau de signes de $f(x) = (x-2)(x+1)(x-1)$:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$x-2$				$-$			0	$+$	
$x+1$		$-$	0			$+$			
$x-1$			$-$		0		$+$		
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   On en déduit que $\boxed{x^3 - 2x^2 \leq x - 2 \Longleftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup [1; 2]}$.

2. On procède par opérations sur les lignes :

$$\begin{cases} 5x & +3y & -z & = 2 \\ -2x & +2y & +3z & = 7 \\ 4x & +12y & +7z & = 5 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x & -9y & -8z & = -3 \\ -2x & +2y & +3z & = 7 \\ 4x & +12y & +7z & = 5 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x & -9y & -8z & = -3 \\ & -16y & -13z & = 1 \\ & 48y & +39z & = 17 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x & -9y & -8z & = -3 \\ & -16y & -13z & = 1 \\ & & 0 & = 20 \end{cases}$$

   On en déduit que $\mathcal{S}$ est équivalent à un système qui contient l'équation $0 = -20$ donc $\boxed{\mathcal{S} \text{ est incompatible}}$.

3. On a : $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=6}^{103} \frac{1}{k-1} = \sum_{k=3}^{101} \frac{1}{k} - \sum_{k=5}^{102} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{101} \frac{1}{k} - \sum_{k=5}^{101} \frac{1}{k} - \frac{1}{102} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{102}$.

   Déterminons la forme irréductible de S. On a :

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{102} = \frac{7}{2^2 \times 3} - \frac{1}{2 \times 3 \times 17} = \frac{7 \times 17 - 2}{2^2 \times 3 \times 17} = \frac{117}{2^2 \times 3 \times 17} \boxed{= \frac{39}{2^2 \times 17}}.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sin^4(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \right)^4 = \frac{1}{16} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x} - 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + 6 - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x} \right) \boxed{= \frac{1}{8} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}}.$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sin(5x) - \sin(x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}5x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x})) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x} 2\mathrm{i} \sin(2x))$$

   Finalement, $\boxed{\text{on a : } \forall x \in \mathbb{R},\ \sin(5x) - \sin(x) = 2\sin(2x)\cos(3x)}$.

6. Etude de la fonction f.
   — $f(x)$ existe si, et seulement si, $x^2 - 4x + 3 \neq 0$. Or, $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, on en déduit que les valeurs interdites sont 1 et 3 et que $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathcal{D} = \mathbb{R} \backslash \{1; 3\}}$.
   — f est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme quotient de fonctions dérivables et on a :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) = \frac{(-2x+8)(x^2-4x+3) - (-x^2+8x-12)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{-4x^2 + 18x - 24}{(x^2-4x+3)^2} = \boxed{-2\frac{2x^2 - 9x + 12}{(x^2-4x+3)^2}}.$$

   — f est strictement monotone sur les intervalles inclus dans $\mathcal{D}$ sur lesquels f' est de signe constant. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f'(x)$ a le signe opposé de $P(x) = 2x^2 - 9x + 12$. P a pour discriminant $\Delta = -15 < 0$, on en déduit que P est strictement positif et donc que f' est strictement négative.
   Il suit que $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty; 1[,\ ]1; 3[\text{ et }]3; +\infty[}$.
   — Etudions les limites de $f(x)$ aux bornes de $\mathcal{D}$.

— Bornes infinies : Pour $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$, on a $f(x) = \frac{-x^2+8x-12}{x^2-4x+3} = \frac{-1+\frac{8}{x}-\frac{12}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} -1+\dfrac{8}{x}-\dfrac{12}{x^2} = -1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2} = 1$. Par quotient, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1}$.

De façon analogue, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1}$.

— Bornes finies : déterminons les limites du dénominateur et du numérateur en 1^-, 1^+, 3^- et 3^+. x^2-4x+3 est une fonction polynômiale de degré 2 qui s'annule en 1 et 3, sa parabole représentative est orientée vers le haut, on en déduit :

$$\lim_{x\to1^-} x^2-4x+3 = 0^+ \;;\; \lim_{x\to1^+} x^2-4x+3 = 0^- \;;\; \lim_{x\to3^-} x^2-4x+3 = 0^- \;;\; \lim_{x\to3^+} x^2-4x+3 = 0^+$$

Le numérateur $-x^2+8x-12$ est continu sur $\mathbb{R}$ et donc $\lim\limits_{x\to1} -x^2+8x-12 = -(1^2)+8-12 = -5$ et de façon analogue $\lim\limits_{x\to3} -x^2+8x-12 = 21$. On peut donc donner toutes les limites par opérations :

$$\boxed{\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty \;;\; \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty \;;\; \lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty \;;\; \lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty}$$

— Dressons le tableau de variations complet de f :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
f	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

7. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: $\phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n = (-1)^n$, démontrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence.

Initialisation pour $n = 0$: on doit vérifier si $\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = (-1)^0$. Calculons :
Tout d'abord, $\phi_2 = \phi_1 + \phi_0 = 1 + 0 = 1$.
D'une part : $\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = 1 - 1 \times 0 = 1$, d'autre part :$(-1)^0 = 1$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire (HDR) : $\phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n = (-1)^n$, montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est également vraie, c'est-à-dire $\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+3}\phi_{n+1} = (-1)^n$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+3}\phi_{n+1} & = & \phi_{n+2}^2 - (\phi_{n+2} + \phi_{n+1})\phi_{n+1} \\
& = & \phi_{n+2}(\phi_{n+2} - \phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\
& = & \phi_{n+2}\phi_n - \phi_{n+1}^2 \\
& = & -(\phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n) \\
& = & -(-1)^n \\
& = & (-1)^{n+1}
\end{array}$$

Finalement, $\mathcal{P}_{n+1}$ est bien vraie.

Conclusion : la propriété a été intialisée pour $n = 0$, elle est héréditaire, $\boxed{\text{elle est donc vraie pour tout } n \in \mathbb{N}}$.