Devoir Maison 4

Pour ce devoir, vous devez dans un premier temps travailler seul pendant 45 minutes. Vous essaierez de traiter le maximum de questions du problème.

Dans un second temps, par groupes de deux ou trois étudiants, vous finirez le problème et rédigerez votre copie commune.

Problème : formule du binôme de Newton

Partie A : Factorielle

Définition
Soit n un entier naturel.
On définit l'entier « factorielle de n », notée $n!$, par $n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \times (n-1)! & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Calculer $0!, 1!, 2!, 3!$ et $5!$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier les nombres $\dfrac{(n+1)!}{n!}$ et $\dfrac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!}$.
3. Prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! = \prod_{k=1}^{n} k$ (c'est-à-dire $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$).
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel nombre est le plus grand : $(n!)^2$ ou $(2n)!$?

Partie B : Coefficients binomiaux

Définition
Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.
On définit le coefficient binomial « p parmi n », noté $\binom{n}{p}$ par : $\displaystyle\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Calculer $\binom{4}{3}$, $\binom{3}{4}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{5}$, $\binom{0}{0}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{n-1}$.
3. Soit $0 \leq p < n$. Montrer que $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

   Cette formule est connue sous le nom *Relation de Pascal*.
4. Peut-on généraliser la relation de Pascal au cas $p = n$?
5. On crée un tableau dont les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de 0. Dans ce tableau on écrit les coefficients binomiaux de la façon suivante : $\binom{n}{p}$ est inscrit dans la cellule qui est à la ligne n et la colonne p.
   (a) Quelle est l'allure de la colonne numérotée 0 ?
   (b) Voici les lignes numérotées 6 et 7 du tableau :

1	6	15	20	15	6	1	0	0	...
1	7	21	35	35	21	7	1	0	...

   À l'aide des questions précédentes, écrire la ligne numérotée 8.
   (c) Nous venons de voir comment construire le *Triangle de Pascal* qui donne les coefficients binomiaux. Quelle conséquence en déduisez-vous sur la nature des nombres $\binom{n}{p}$?

Partie C : Formule du binôme de Newton

Dans la suite, a et b désignent des nombres réels (ou complexes, ça fonctionne aussi).

1. Développer $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ (on ordonnera les termes par puissance décroissante de a).
2. En déduire les développements de $(a-b)^3$ et $(a-b)^4$ (on ordonnera les termes par puissance décroissante de a).
3. Prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
4. Déduire des questions précédentes le développement de $(a+b)^7$.