

## Mathématiques - Devoir Maison 4

À remettre par binômes le mardi 5 janvier.

---

L'objectif de cet exercice est de trouver toutes les fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  qui vérifient l'équation fonctionnelle :  $(\star) : f''(x) - f(-x) = x$ .

On suppose qu'il existe une telle fonction  $f$ .

1. On pose,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) + f(-x)$ .
  - a) Etudier la parité de  $g$ .
  - b) Justifier que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  puis exprimer  $g'$  et  $g''$  en fonction de  $f$  et de ses dérivées.
  - c) Justifier que  $g$  est solution de (1) :  $y'' = y$ .
  - d) Donner toutes les solutions paires de (1).

2. On pose,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = f(x) - f(-x) - 2x$ .  
En procédant de façon analogue à la question précédente, donner une expression générale pour  $h(x)$ .

3. Dédire de ce qui précède qu'il existe deux constantes réelles  $\lambda$  et  $\mu$  telles que, pour tout réel  $x$ , on ait :

$$f(x) = \lambda(e^x + e^{-x}) + \mu \sin x + x$$

4. Le travail précédent a été réalisé sous l'hypothèse qu'une fonction  $f$  satisfaisant  $(\star)$  existait. Que reste-t-il à faire pour pouvoir conclure ?
- 

En option pour ceux qui en veulent plus : l'exercice 15 de la fiche d'exercice Compléments sur les Complexes.