Devoir Maison 4 - corrigé

Questions de cours

Objectif : vérifier que le cours est connu de façon précise.
Temps nécessaire : 5-10 minutes.

1. « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ »signifie : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - 2| \leq \varepsilon}$.
2. « f est paire » signifie : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)}$.
3. Formule du binôme de Newton : $\boxed{\text{pour tout } (a,b) \in \mathbb{C}^2 \text{ et tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a } (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$.
4. Théorème fondamental de l'analyse :
   Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, soit $a \in I$.
   La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, c'est la primitive de f qui s'annule en a.
5. La fonction Arcsin est définie sur $[-1;1]$, à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Elle est dérivable sur $]-1;1[$ et, pour $x \in]-1;1[$ on a $\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ qui est positif donc Arcsin est croissante sur $]-1;1[$ et donc sur $[-1;1]$ par continuité.

Exercice 1 : une fonction de la variable réelle, à valeurs complexes

Exercice sur les complexes et les applications, l'objectif est double : calculer dans $\mathbb{C}$ et manipuler les définitions d'applications surjectives et injectives.
Questions faciles : 1, 2 (module d'un quotient). Pour 3 et 4 : donner les définitions.
Temps nécessaire : 20-30 minutes.

1. $\forall z \in \mathbb{C},\ 1 - \mathrm{i}z = 0 \Longleftrightarrow z = -\mathrm{i}$. Il suit que pour $x \in \mathbb{R}$, $1 - \mathrm{i}x \neq 0$ et donc $f(x)$ existe.
   Finalement, $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}\right| = \dfrac{|1+\mathrm{i}x|}{|1-\mathrm{i}x|} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\ \boxed{=1}$.
3. D'après la question précédente, $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{U}$. 2 n'a donc pas d'antécédent par f et $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$.
4. On revient à la définition de l'injectivité. Soit x et y deux réels tels que $f(x) = f(y)$. On a :
   $$f(x) = f(y) \Longleftrightarrow \frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x} = \frac{1+\mathrm{i}y}{1-\mathrm{i}y} \Longleftrightarrow (1+\mathrm{i}x)(1-\mathrm{i}y) = (1+\mathrm{i}y)(1-\mathrm{i}x) \Longleftrightarrow \mathrm{i}(x-y) = \mathrm{i}(y-x) \Longleftrightarrow x = y$$
   Finalement, $\boxed{f \text{ est injective}}$.
5. Soit $\theta \in [0; 2\pi[$. On a :
   $$f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Longleftrightarrow \frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Longleftrightarrow \mathrm{i}x(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1$$
   Pour $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 0$ c'est-à-dire $\theta = \pi$ l'équation devient $0 = -1$ qui n'a pas de solution. Pour $\theta \neq \pi$ on a :
   $$f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Longleftrightarrow x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1)} \Longleftrightarrow x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} 2\mathrm{i}\sin(\frac{\theta}{2})}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} 2\cos(\frac{\theta}{2})} \Longleftrightarrow \boxed{x = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$
6. On a $f(\mathbb{R}) = \{f(x)\ /\ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{U}$ d'après la question 2.
   On a vu à la question précédente que -1 n'admet pas d'antécédent par f mais que tous les autres complexes de module 1 en admettent un.
   On a donc $\boxed{f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} - \{-1\}}$.
7. On a : $f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}(\mathbb{R} \cap (\mathbb{U} - \{-1\})) = f^{-1}(\{1\})\ \boxed{=\{0\}}$ (d'après la question 5).

Exercice 2 : une égalité à établir

Exercice sur les fonctions trigonométriques réciproques et hyperboliques. Calcul. Limites. Dérivation. Questions faciles : 1 (cours), 2 (remplacer x et vérifier ; peut-être calculatoire). Temps nécessaire : 30-40 minutes.

1. Pour tout réel x on a :
$$\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=(\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x))(\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x))=\frac{2\mathrm{e}^{-x}}{2}\frac{2\mathrm{e}^{x}}{2}=\frac{4\mathrm{e}^0}{4}\boxed{=1}$$

2. On a $\mathrm{e}^{\ln(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$ et $\mathrm{e}^{-\ln(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$. Il suit :
$\mathrm{sh}(\ln(\sqrt{2}-1))=\dfrac{\sqrt{2}-1-(\sqrt{2}+1)}{2}=-1$ et donc $|\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(\ln(\sqrt{2}-1)))|=|\mathrm{Arctan}(-1)|=|-\dfrac{\pi}{4}|=\dfrac{\pi}{4}$.
De plus, $\mathrm{ch}(\ln(\sqrt{2}-1))=\sqrt{2}$ et donc $\mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(\ln(\sqrt{2}-1))}\right)=\mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mathrm{Arccos}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.
Finalement, $\boxed{\text{l'égalité }(\star)\text{ est vraie pour }x=\ln(\sqrt{2}-1)}$.

3. On procède par opérations sur les limites :
   - On a $\mathrm{sh}(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et, comme $\mathrm{Arctan(u)}\underset{u\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}$, par composition : $|\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(x))|\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}$.
   - D'autre part, $\mathrm{ch}(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et donc $\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0^+$. Comme Arccos est continue en 0 et que $\mathrm{Arccos}(0)=\frac{\pi}{2}$ on a $\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}$.

   Finalement, on a bien $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}|\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(x))|=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)}$.

4. Arctan et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
Arccos est définie sur $[-1;1]$ et ch sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $\mathrm{ch}(x)\geq 1$ donc $\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\in]0;1]$ donc $g(x)$ existe.
Finalement, $\boxed{f\text{ et }g\text{ sont bien définies sur }\mathbb{R}}$.

5. Pour $x\geq 0$ on a $\mathrm{sh}(x)\geq 0$ et pour tout $y\geq 0$ on a $\mathrm{Arctan}(y)\geq 0$, par composition on déduit que pour $x\geq 0$ on a $f(x)\geq 0$.
f est impaire comme composée de fonctions impaires, on déduit que pour $x\leq 0$ alors $f(x)\leq 0$.
Finalement, $\boxed{\text{pour tout réel }x,\ f(x)\text{ est du signe de }x}$.

6. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Arccos est dérivable sur $]-1;1[$ donc g est dérivable dès lors que $\mathrm{ch}(x)\neq 1\iff x\neq 0$. Finalement, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
On peut calculer les dérivées par opérations :
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\mathrm{Arctan}'(\mathrm{sh}(x))\mathrm{sh}'(x)=\frac{\mathrm{sh}'(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)}=\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}\boxed{=\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}}$$
$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ g'(x)=\mathrm{Arccos}'\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)\times\frac{-\mathrm{ch}'(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}}}\times\frac{-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}$$
On a : $\sqrt{1-\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}}=\sqrt{\dfrac{\mathrm{ch}^2(x)-1}{\mathrm{ch}^2(x)}}=\sqrt{\dfrac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}}=\dfrac{|\mathrm{sh}(x)|}{\mathrm{ch}(x)}$ et donc on peut conclure que
$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \boxed{g'(x)=\frac{\mathrm{sh}(x)}{|\mathrm{sh}(x)|}\times\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}=\begin{cases}\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} & \text{si } x>0\\ \frac{-1}{\mathrm{ch}(x)} & \text{si } x<0\end{cases}}$$

7. f et g ont même dérivées sur $\mathbb{R}^{+*}$, elles sont donc égales à une constante additive près : il existe un réel k tel que $\forall x>0, f(x)=g(x)+k$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ on a $k=0$ et $(\star)$ est vraie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
En remarquant que $|f|$ et g sont deux fonctions paires, leur égalité sur $\mathbb{R}^{+*}$ donne leur égalité sur $\mathbb{R}^*$.
On vérifie que $(\star)$ est vraie pour $x=0$ et, finalement, $\boxed{(\star)\text{ est vraie pour tout réel }x}$.

Exercice 3 : une équation différentielle

Equation différentielle linéaire du premier ordre. Objectif : vérifier que la méthode est connue. Probable variation de la constante pour la solution pariculière.
Question facile : solution de l'équation homogène ; solution générale.
Temps nécessaire : 15-20 minutes.

1. (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre, on la résout selon la méthode du cours.
   — L'équation homogène (E_h) : $xy' + (1-x)y = 0$ est équivalente, pour $x > 0$, à $y' + (\frac{1}{x} - 1)y = 0$.
   On pose $a(x) = \frac{1}{x} - 1$, une primitive de a est $A(x) = \ln(x) - x$ et les solutions de (E_h) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ c'est-à-dire $x \mapsto \lambda \frac{e^x}{x}$ où λ est un réel.
   — On utilise la variation de la constante : on recherche une solution particulière de la forme $f(x) = \lambda(x)\frac{e^x}{x}$ où $\lambda(x)$ est une fonction dérivable à trouver.
   f est solution de (E) si, et seulement si :

$$\begin{aligned} xf' + (1-x)f = e^{2x} &\iff x\left(\lambda'(x)\frac{e^x}{x} + \lambda(x)\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right) + (1-x)\lambda(x)\frac{e^x}{x} = e^{2x} \\ &\iff \lambda'(x) = e^x \\ &\Longleftarrow \lambda(x) = e^x \end{aligned}$$

   Finalement, $f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ est une solution particulière de (E).
   — $\boxed{\text{La solution générale de } (E) \text{ est } \left\{x \mapsto \dfrac{\lambda e^x + e^{2x}}{x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$
2. Les solutions de (E) sont de la forme $y(x) = \frac{\lambda e^x + e^{2x}}{x}$ avec $x > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \lambda e^x + e^{2x} = \lambda + 1$. Si $\lambda \neq -1$, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = \pm\infty$ selon le signe de λ.
   Maintenant, si $\lambda = -1$, on a $y(x) = \dfrac{e^x(e^x - 1)}{x} = e^x \dfrac{e^x - 1}{x}$. Or, on sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ donc on déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = 1$.

   $\boxed{\text{Finalement, il existe une seule solution de } (E) \text{ ayant une limite finie en } 0 : y(x) = \dfrac{-e^x + e^{2x}}{x}.}$

Exercice 4 : une somme double

Somme double : souvent plus effrayant que difficile. Objectif : savoir l'écrire sous la forme d'une somme de somme.
À remarquer : le terme sommé (2^{i-1}) évoque une somme géométrique, indiquer la formule.
Temps nécessaire : 15 minutes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{i-1} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{j} 2^{i-1}}_{(\star)}$.

La somme $(\star)$ est une somme géométrique qui vaut $\frac{1-2^j}{1-2} = 2^j - 1$, on a donc :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{i-1} = \sum_{j=1}^{n} (2^j - 1) = \left(\sum_{j=1}^{n} 2^j\right) - n = 2 \times \underbrace{\sum_{j=1}^{n} 2^{j-1}}_{(\star)} - n = 2(2^n - 1) - n = \boxed{2^{n+1} - 2 - n}.$$