Devoir Maison 5 - à remettre le 22 février

Pour ce devoir maison, vous allez choisir entre :

- Travailler seul ou en groupe (maximum 4) sur un travail de recherche, le théorème de Césaro (un classique) et quelques applications de ce résultat.
- Travailler seul pour revoir et consolider des acquis. Vous traiterez à nouveau l'exercice 1 du DS3 (le concours blanc).

Dans les deux cas, vous disposerez du corrigé (que je mettrai en ligne le 14 février pour le travail de recherche). Votre travail consiste à traiter le sujet choisi puis, à l'aide du corrigé, à vous auto-corriger. Vous commenterez vos copies en vert.

Ce que j'évaluerai n'est pas votre capacité à recopier un corrigé, mais la pertinence de vos remarques. Dans vos commentaires, vous pourrez également me poser des questions sur des points que vous n'auriez pas compris.

L'objectif de cet exercice est de démontrer un théorème relatif aux suites : le **théorème de Césaro**. Pour simplifier les notations, on numérote les termes des suite à partir de 1 ; tous les résutats indiqués restent vrais si la numérotation part de 0.

Définition
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. On appelle *suite des moyennes* de u la suite $\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème (Césaro)
Si la suite u tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, la suite de ses moyennes également.

A) Peuve du théorème

Soit u une suite qui converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on note v la suite de ses moyennes.

1. Cas $\ell = 0$: soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   (b) En utilisant la question précédente, prouver que v converge vers 0.
2. Cas $\ell \in \mathbb{R}$: en utilisant 1., prouver que v converge vers ℓ.
3. Cas $\ell = +\infty$: prouver que v tend vers $+\infty$.
4. Cas $\ell = -\infty$: déduire du cas précédent que v tend vers $-\infty$.

B) Réciproque ?

1. Enoncer la réciproque du théorème de Césaro.
2. Cette réciproque est fausse, proposer un contre-exemple.
3. Démontrer que si on ajoute l'hypothèse de monotonie sur u alors la réciproque du théorème de Césaro est vraie.

C) Lemme de l'escalier

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.
   Montrer que $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. *(Lemme de l'escalier)*
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.
   Montrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 0$ alors $(u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
3. En déduire la limite de $\left(\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}\right)_n$.