3 heures

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page). Il est vivement conseillé de commencer par l'exercice 1.
- Les questions sont de difficulté variable. Certaines sont difficiles, les idées que vous aurez seront valorisées même si elles n'aboutissent pas.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à encadrer les résultats. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Barème prévisionnel : Exercice 1 : 10 points, Problème 1 : 10 points, Problème 2 : 10 points.
1 point pour l'aspect de la copie, 1 point pour utiliser $\forall$.

Dans ce devoir, comme dans tous les autres, vous avez le droit d'utiliser le résultat d'une question (même non abordée) pour traiter les questions suivantes.

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Question 1 : Inverser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 2 : Résoudre $y'' + 4y = 4y' + 1$ avec la condition $y(0) = y'(0) = 1$.

Question 3 : Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}} \quad ; \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\ \mathrm{d}x \quad ; \quad I_3 = \int_0^1 x\mathrm{e}^{3x}\ \mathrm{d}x$$

Question 4 : Déterminer $\lim \dfrac{3n+1}{n!}$.

Problème 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1. **Etude de A :**
   Soit les matrices $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   a) Prouver que $P \in \mathcal{G}l_2(\mathbb{R})$.
   b) Déterminer P^{-1}.
   c) Calculer PDP^{-1}.
   d) En déduire une expression pour A^n (pour $n \in \mathbb{N}$).

2. **Application à l'étude de deux suites :**
   Soit $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 5v_n \end{cases}$
   a) Calculer u_1 et v_1.
   b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et de X_n.
   c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et n.
   d) Etudier le comportement asymptotique des deux suites u et v.

3. **Application à l'étude d'un système différentiel** :

   On cherche à résoudre le système de deux équations différentielles $\left\{\begin{array}{l} y' = -y + 2z \\ z' = -4y + 5z \end{array}\right.$ où y et z désignent deux fonctions inconnues, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

   On pose $X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}$ c'est-à-dire que $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

   On va raisonner par analyse-synthèse.

   (a) Supposons qu'il existe des fonctions y et z définies et dérivables sur R qui satisfassent le système différentiel. Donner une relation entre A, X et X'.

   (b) On pose $X_1 = P^{-1}X$. Prouver que $X_1' = DX_1$.

   (c) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. Déterminer des expressions pour les fonctions f et g, en déduire y et z.

   (d) Faire la synthèse.

Problème 2

L'objectif de ce problème est de prouver que le nombre $\exp(1)$, noté e, est un nombre irrationnel.

Les parties A et B sont, dans une large mesure indépendantes. Tout du long du problème, on pourra admettre les résultats des questions pour traiter les suivantes.

Partie A

Soit n, un entier naturel non nul, x un réel. On pose $R_n : x \longmapsto \mathrm{e}^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y = \frac{x^n}{n!}$.

1. Donner la solution de l'équation homogène associée à (E).
2. Utiliser la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière de (E), on exprimera cette solution à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.
3. Donner l'ensemble des solutions de (E).
4. Prouver que R_n est une solution de E.
5. Déduire des questions précédentes que, $R_n(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x \frac{t^n \mathrm{e}^{-t}}{n!}\, \mathrm{d}t$.
6. Montrer que, pour tout réel positif x, on a $|R_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}\mathrm{e}^x}{(n+1)!}$.
7. Soit α un réel positif. Prouver que la suite $\left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
8. En déduire que, pour tout réel positif x, e^x est la limite d'une suite (dont l'expression ne fait pas intervenir exp).

Partie B

On considère à présent deux suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1. Montrer que les suites u et v sont strictement monotones.
2. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
3. Justifier l'existence d'un unique réel ℓ qui vérifie : $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ u_q < \ell < v_q$.
4. Supposons que ℓ soit rationnel, il est alors possible de l'écrire sous la forme d'un quotient $\ell = \dfrac{p}{q}$ avec p et q qui sont premiers entre eux. En utilisant la question précédente, montrer que c'est absurde.
5. Conclure à l'irrationnalité de e.