Devoir Maison 5, à remettre le mercredi 10 janvier

Pour ce devoir, vous devez dans un premier temps travailler seul pendant 45 minutes. Vous essaierez de traiter le maximum de questions du problème.

Dans un second temps, par groupes de trois étudiants, vous finirez le problème et rédigerez votre copie commune.

Problème : irrationalité de exp(1)

L'objectif de ce problème est de prouver que le nombre exp(1), noté e, est un nombre irrationnel.

Les parties A et B sont, dans une large mesure indépendantes. Tout du long du problème, on pourra admettre les résultats des questions pour traiter les suivantes.

Partie A

Soit n, un entier naturel non nul, x un réel. On pose $R_n : x \longmapsto \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y = \frac{x^n}{n!}$.

1. Donner la solution de l'équation homogène associée à (E).
2. Utiliser la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière de (E), on exprimera cette solution à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.
3. Donner l'ensemble des solutions de (E).
4. Prouver que R_n est une solution de E.
5. Déduire des questions précédentes que, $R_n(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x \frac{t^n \mathrm{e}^{-t}}{n!}\, \mathrm{d}t$.
6. Montrer que, pour tout réel positif x, on a $|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}\mathrm{e}^x}{(n+1)!}$.
7. Soit α un réel positif. Prouver que la suite $\left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
8. En déduire que, pour tout réel positif x, e^x est la limite d'une suite (dont l'expression ne fait pas intervenir exp).

Partie B

On considère à présent deux suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1. Montrer que les suites u et v sont strictement monotones.
2. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
3. Justifier l'existence d'un unique réel ℓ qui vérifie : $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ u_q < \ell < v_q$.
4. Supposons que ℓ soit rationnel, il est alors possible de l'écrire sous la forme d'un quotient $\ell = \frac{p}{q}$ avec p et q qui sont premiers entre eux. En utilisant la question précédente, montrer que c'est absurde.
5. Conclure à l'irrationnalité de e.