Mathématiques - Devoir Maison 5

À remettre par binômes le lundi 10 février.

L'objectif de cet exercice est de démontrer un théorème relatif aux suites : le **théorème de Césaro**. Pour simplifier les notations, on numérote les termes des suite à partir de 1 ; tous les résutats indiqués restent vrais si la numérotation part de 0.

Définition
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. On appelle *suite des moyennes* de u la suite $\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème
Si la suite u tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, la suite de ses moyennes également. *(Césaro)*

A) Peuve du théorème

Soit u une suite qui converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on note v la suite de ses moyennes.

1. Cas $\ell = 0$: soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   (b) En utilisant la question précédente, prouver que v converge vers 0.
2. Cas $\ell \in \mathbb{R}$: en utilisant 1., prouver que v converge vers ℓ.
3. Cas $\ell = +\infty$: prouver que v tend vers $+\infty$.
4. Cas $\ell = -\infty$: déduire du cas précédent que v tend vers $-\infty$.

B) Réciproque ?

1. Enoncer la réciproque du théorème de Césaro.
2. Cette réciproque est fausse, proposer un contre-exemple.
3. Démontrer que si on ajoute l'hypothèse de monotonie sur u alors la réciproque du théorème de Césaro est vraie.

C) Lemme de l'escalier

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.
   Montrer que $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. *(Lemme de l'escalier)*
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.
   Montrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 0$ alors $(u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
3. En déduire la limite de $\left(\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}\right)_n$.

En option pour ceux qui en veulent plus : l'exercice 16 de la fiche sur la dérivation.