Mathématiques - Correction du Devoir Maison 5

A) Peuve du théorème

Soit u une suite qui converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on note v la suite de ses moyennes.

1. Cas $\ell = 0$: soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   $u \to 0$ signifie que $\forall \delta > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n| < \delta$.
   On applique cette définition avec $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.
   (b) En utilisant la question précédente, prouver que v converge vers 0.
   On a, pour $n > 0$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} u_k + \dfrac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} u_k$. En utilisant l'inégalité triangulaire, il vient :
   $$\forall n > N,\ |v_n| \leq \frac{|\sum_{k=1}^{N-1} u_k|}{n} + \frac{|\sum_{k=N}^{n} u_k|}{n} \leq \frac{|\sum_{k=1}^{N-1} u_k|}{n} + \frac{n-N+1}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{|\sum_{k=1}^{N-1} u_k|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$
   Or, $|\sum_{k=1}^{N-1} u_k|$ est un réel et donc, à partir d'un certain rang M, $\frac{|\sum_{k=1}^{N-1} u_k|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ce qui assure que, si $n \geq max(N, M)$, alors $|v_n| \leq \varepsilon$. On a donc bien v qui tend vers 0.
2. Cas $\ell \in \mathbb{R}$: en utilisant 1., prouver que v converge vers ℓ.
   Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente à la suite $u - \ell$.
3. Cas $\ell = +\infty$: prouver que v tend vers $+\infty$.
   Soit $A > 0$. La suite u tend vers $+\infty$, il existe donc un rang N à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à $2A$. On a, pour tout $n > N$:
   $$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} u_k \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} u_k + 2A\frac{n-N+1}{n}$$
   - *$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} u_k$ tend vers 0 et donc, est supérieur à $-\frac{A}{2}$ à partir d'un certain rang M_1 ;*
   - *$2\frac{n-N+1}{n}$ tend vers 2 et donc, est supérieur à $\frac{3}{2}$ à partir d'un certain rang M_2.*

   Finalement, si $n \geq max(N, M_1, M_2)$, alors $v_n \geq A$ et on a donc bien $v_n \to +\infty$.
4. Cas $\ell = -\infty$: déduire du cas précédent que v tend vers $-\infty$.
   Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite $-u$.

B) Réciproque ?

1. Enoncer la réciproque du théorème de Césaro.
   La réciproque est « si la suite des moyennes tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors la suite converge aussi vers ℓ ».
2. Cette réciproque est fausse, proposer un contre-exemple.
   On peut prendre la suite alternée $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: cette suite diverge alors que la suite de ses moyennes converge vers 0.
3. Démontrer que si on ajoute l'hypothèse de monotonie sur u alors la réciproque du théorème de Césaro est vraie.
   Supposons que u soit monotone et que la suite de ses moyenne tende vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. La suite u est monotone, alors elle a une limite $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. Le théorème de Césaro nous assure que c'est ℓ' est la limite de la suite des moyennes de u, on a donc $\ell = \ell'$.

C) Lemme de l'escalier

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.
   Montrer que $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. *(Lemme de l'escalier)*
   Soit, pour $n \geq 1$, $v_n = u_n - u_{n-1}$. Par hypothèse, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
   En appliquant le théorème de Césaro, on a $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Or, par téléscopage, pour tout $n \geq 1$, on a : $\sum_{k=1}^{n} v_k = u_n - u_0$. On a donc : $\frac{u_n - u_0}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Or, $\frac{u_n - u_0}{n} \sim \frac{u_n}{n}$, ce qui donne le résultat voulu.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 0$ alors $(u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Tous les termes de u étant strictement positifs, on peut prendre leurs logarithmes.
On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln u_{n+1} - \ln u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln \ell$ *par composition (possible car* $\ell > 0$*). On applique le lemme de l'escalier à la suite* $(\ln u_n)_n$ *et on a* $\frac{\ln u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln \ell$*. En composant avec* $\exp$ *on obtient le résultat voulu.*

3. En déduire la limite de $\left(\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}\right)_n$.
On a, pour tout $n \geq 0$ *:* $\frac{\binom{2(n+1)}{(n+1)}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$*. Les conditions sont réunies pour appliquer le résultat de la question précédente (termes strictement positifs, quotient qui tend vers une limite finie non nulle), on obtient :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}\right)_n = 4$.