

Devoir Maison 6 - à remettre le mardi 28 février

Pour ce devoir, vous travaillerez en groupe (minimum 2) sur au moins deux exercices. Le premier, sur les matrices, est obligatoire. Les trois suivants permettent de revoir les fondamentaux sur les espaces vectoriels.

Un devoir maison facultatif sera proposé en plus pour ces vacances.

Exercice n° 1

Soit $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = X^2 + 2X - 3$.

1. Calculer $P(M) = M^2 + 2M - 3I_3$.
2. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, le reste dans la division euclidienne de X^n par P .
3. En déduire l'expression de M^n en fonction de $n \geq 1$.

Exercice n° 2

Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels :

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0, 1]$, continues, positives ou nulles.
2. L'ensemble des fonctions réelles sur \mathbf{R} vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
3. L'ensemble des solutions (x_1, x_2, x_3) du système :
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$
4. L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ vérifiant $f(1/2) = 0$.
5. L'ensemble des fonctions impaires sur \mathbb{R} .
6. L'ensemble des fonctions sur $[a, b]$ continues, vérifiant $f(a) = 7f(b) + \int_a^b t^3 f(t) dt$.
7. L'ensemble des fonctions sur \mathbb{R} qui sont nulle en 1 ou nulle en 4.
8. L'ensemble des fonctions de classe C^2 vérifiant $f'' + 2f = 0$.
9. L'ensemble des fonctions sur \mathbb{R} telles que $f(3) = 7$.
10. L'ensemble des primitives de la fonction xe^x sur \mathbb{R} .
11. L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).
12. L'ensemble des points (x, y) de \mathbb{R}^2 , vérifiant $\sin(x + y) = 0$.
13. L'ensemble des vecteurs (x, y, z) de \mathbb{R}^3 orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$.
14. L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7.

Exercice n° 3

Prouver que dans \mathbb{R}^3 , les vecteurs $u_1 = (2, 3, -1)$ et $u_2 = (1, -1, -2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que les vecteurs $v_1 = (3, 7, 0)$ et $v_2 = (5, 0, -7)$.

Exercice n° 4

Dans \mathbb{R}^4 soit les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$.

1. Vect $\{v_1, v_2\}$ et Vect $\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?
2. Vect $\{v_1, v_2\}$ et Vect $\{v_4, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?
3. Vect $\{v_1, v_3, v_4\}$ et Vect $\{v_2, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?
4. Vect $\{v_1, v_4\}$ et Vect $\{v_3, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?