Devoir Maison 6 - à remettre le lundi 18/1

Ce devoir est à remettre par binômes.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose :

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t)\mathrm{d}t$$

I. Convergence de la suite $\left(\frac{J_k}{I_k}\right)_k$

a) Etablir l'implication $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \implies t \leq \frac{\pi}{2}\sin t$ *(on pourra se ramener à une étude de fonction).*

b) Prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+1})$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{k+1} en fonction de I_k.

d) En déduire la limite de $\frac{J_k}{I_k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

II. Convergence de la suite $(S_n)_n$

a) Pour $k \geq 1$, à l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_k en fonction de J_k et de J_{k-1}.

b) En déduire que pour tout $k \geq 1$ on a : $\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}$.

c) Calculer J_0 et I_0 puis déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.