Devoir Maison 6 - corrigé

Renforcement

1. Résoudre $y'' + 2y' + y = t$ avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$.

   Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficient constants. On applique la méthode du cours :
   - L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0 \iff (r+1)^2 = 0 \iff r = -1$. On en déduit que les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu t e^{-t}$ avec λ et μ des réels.
   - Le second membre est polynômial de degré 1, on cherche une solution particulière polynômiale de degré 1. Soit $f(t) = at + b$, f est solution de l'équation si, et seulement si :
   $$f'' + 2f' + f = t \iff 2a + at + b = t \iff \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$
   On a donc $f(t) = t - 2$ qui est solution particulière de l'équation.
   - La solution générale de l'équation est donc $y(t) = t - 2 + \lambda e^{-t} + \mu t e^{-t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   - Les conditions initiales permettent de fixer les valeurs de λ et μ : $y(0) = 1 \iff -2 + \lambda = 1 \iff \lambda = 3$ $y'(0) = 1 \iff 1 - \lambda + \mu = 1 \iff \mu = \lambda$ et donc $\mu = 3$.

   Finalement, $\boxed{\text{l'unique solution de l'équation vérifiant les conditions initiales est } y(t) = t - 2 + 3(1+t)e^{-t}}$.

2. Soit la suite u définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + u_{n+1} = 6u_n$.
   Déterminer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

   Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On applique la méthode du cours :
   - L'équation caractéristique est $r^2 + r = 6 \iff (r-2)(r+3) = 0 \iff r \in \{2; -3\}$.
   On en déduit qu'il existe des réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda 2^n + \mu(-3)^n$.
   - Les premiers termes permettent de fixer les valeurs des constantes :
   $$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 2\lambda - 3\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \mu = \frac{3}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{7}{5} \\ \mu = \frac{3}{5} \end{cases}$$
   Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a } u_n = \frac{7}{5}2^n + \frac{3}{4}(-3)^n}$.

3. Résoudre $z^2 + (i-5)z + 6 = 2i$.

   $z^2 + (i-5)z + 6 = 2i \iff z^2 + (i-5)z + 6 - 2i = 0$.
   Notons $P(z) = z^2 + (i-5)z + 6 - 2i$. On observe que 2 est racine de P et donc P se factorise par $z - 2$.
   On a : $P(z) = (z-2)(z-3+i)$ et donc $\boxed{P(z) = 0 \iff z \in \{2; 3-i\}}$.

4. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles ?
   Le cas échéant, précser leurs inverses.

   $\det(A) = -20$ donc A est inversible et $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{-20}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}}$.
   Pour B, on applique la méthode du cours :
   $$(A|I_3) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$
   $$\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{9}L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{4}{9} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right) \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\sim} (I_3|A^{-1})$$
   Avec $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$.

5. Résoudre l'équation différentielle $xy' - 2y = -x^2\ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre. On applique la méthode du cours, en commençant par écrire :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, xy' - 2y = -x^2\ln x \Longleftrightarrow y' - \frac{2}{x}y = -x\ln x \ : (E).$$

   — **Résolution de l'équation homogène** (E_h) : $y' - \frac{2}{x}y = 0$ **:** on pose, pour $x > 0$, $a(x) = -\frac{2}{x}$ et alors $A(x) = -2\ln(x) = -\ln(x^2)$ est une primitive de $a(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   Il suit que la solution de (E_h) est $\left\{x \longmapsto \lambda x^2/\lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

   — **Recherche de solution particulière avec variation de la constante :**
   soit, pour $x > 0$, $f(x) = \lambda(x)x^2$ avec $\lambda(x)$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   f est solution de (E) si, et seulement si :

   $$xf'(x) - 2f(x) = -x^2\ln x \Longleftrightarrow x(\lambda'(x)x^2 + 2x\lambda(x)) - 2x^2\lambda(x) = -x^2\ln x \Longleftrightarrow \lambda'(x) = -\frac{\ln x}{x}.$$

   On reconnait une forme « $u'u$ » et il suit que $\lambda(x) = -\frac{1}{2}(\ln x)^2$ convient.
   Finalement, $f(x) = -\frac{x^2(\ln x)^2}{2}$ est solution particulière de (E).

   — **Solution générale de** (E) **:** $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \left\{x \longmapsto x^2\left(\lambda - \frac{(\ln x)^2}{2}\right)/\lambda \in \mathbb{R}\right\}}$.

6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{ch}(x)\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x)\sin^2(x)\ \mathrm{d}x$.

   On a : $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{ch}(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 x\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x + \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x\right)$. On procède par parties pour chaque intégrale :

   $$\int_0^1 x\mathrm{ch}(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left([x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x + \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - [\mathrm{e}^x]_0^1 - \frac{1}{\mathrm{e}} + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1\right) \boxed{= 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}}$$

   On commence par linéariser l'intégrande :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x)\sin^2(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \times \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2 = \frac{-1}{8}\left(-4\cos(x) + 2\cos(3x) + 2\cos(x)\right)$$

   Finalement, $\forall x \in \mathbb{R},\ cos(x)\sin^2(x) = \frac{1}{4}(\cos(x) - \cos(3x))$ et il suit que :

   $$\int_0^\pi \cos(x)\sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1}{4}(\cos(x) - \cos(3x))\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\sin(x) - \frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^\pi \boxed{= 0}$$

7. Pour $x \in \mathbb{R}$, factoriser $\sin(5x) - \sin(x)$.

   On utilise l'angle moitié :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(5x) - \sin(x) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}5x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3+2)x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(3-2)x}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x})\right)$

   $$= \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}2\mathrm{i}\sin(2x)\right) \boxed{= 2\cos(3x)\sin(2x)}$$

Recherche

1. On calcule :

   $$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \quad ; \quad f''(x) = \frac{1 \times 3}{2^2}x^{-\frac{5}{2}} \quad ; \quad f^{(3)}(x) = -\frac{1 \times 3 \times 5}{2^3}x^{-\frac{7}{2}}.$$

   $\boxed{\text{On conjecture que, pour tout entier } n > 0, \text{ on a } f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{\prod_{i=0}^{n-1} 2i+1}{2^n} x^{-\frac{2n+1}{2}}}$.

2. On démontre la formule conjecturée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Initialisation** : pour $n = 1$ la formule est vraie (on l'a vu à la question 1).

- **Hérédité** : supposons que la formule est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. $f^{(n+1)} = (f^n)'$ et on a donc, pour tout $x > 0$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((-1)^n \frac{\prod_{i=0}^{n-1} 2i+1}{2^n} x^{-\frac{2n+1}{2}}\right) = (-1)^n \frac{\prod_{i=0}^{n-1} 2i+1}{2^n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-\frac{2n+1}{2}}\right) \quad : (\star)$$

Or, $\forall x > 0,\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-\frac{2n+1}{2}}\right) = (-\dfrac{2n+1}{2})x^{-\frac{2n+1}{2}-1} = (-\dfrac{2n+1}{2})x^{-\frac{2n+3}{2}}$.
En remplaçant dans $(\star)$ on a : $\forall x > 0, f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{\prod_{i=0}^{n} 2i+1}{2^{n+1}} \times x^{-\frac{2n+3}{2}}$, la propriété est donc héréditaire.

- **Conclusion** : $\boxed{\text{la propriété est vrai pour } n = 1\text{, elle est héréditaire donc vraie pour tout } n > 1}$.