

Devoir Maison 7

Ce devoir maison est à traiter par groupes et à remettre le mardi 3 mars.
Les copies individuelles ne seront pas acceptées.

Problème : constante γ d'Euler

Ce problème a pour objet une étude de la constante d'Euler notée γ . On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$.

Partie I : définition de γ et premiers encadrements

1. Calculer u_1 .
2. Énoncer le théorème des accroissements finis.
3. À l'aide du théorème des accroissements finis, prouver qu'on pour tout $n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de $u_{n+1} - u_n$ sans $\sum$.
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante puis qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1$.
(On pourra penser à des sommes télescopiques).
6. Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note γ sa limite (constante d'Euler).
Préciser un encadrement de γ .
7. Soit k , un entier naturel non nul.

- (a) Après avoir factorisé son expression, étudier sur l'intervalle $[k, k+1]$, le signe de la fonction f_k définie par :

$$f_k(x) = \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)(x - k) - \frac{1}{x}$$

- (b) f_k étant continue, elle admet des primitives. Soit F_k une primitive de f_k , comparer $F_k(k)$ et $F_k(k+1)$.
(c) En considérant une expression de $F_k(x)$, prouver l'encadrement

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right)$$

8. Prouver que $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$.

Partie II : vers une approximation de γ

1. On définit les fonctions g_1 et g_2 sur $]0, +\infty[$ par :

$$g_1(x) = -\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x^2} \qquad g_2(x) = g_1(x) + \frac{2}{3x^3}$$

Étudier les variations de g_1 et g_2 sur $]0, +\infty[$ et en déduire leur signe.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3} \leq u_n - u_{n+1} \leq \frac{1}{2n^2}$$

3. Dans cette question $n \geq 2$ et $p \geq n$.

- (a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis appliqué à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ entre k et $k+1$ (k entier), former un encadrement de $\sum_{k=n}^p \frac{1}{k^2}$.

- (b) Former par une méthode analogue à celle de la question (a). un encadrement de $\sum_{k=n}^p \frac{1}{k^3}$.

- (c) En déduire

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{3(n-1)^2} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

4. Donner une valeur de l'entier n telle que l'encadrement précédent permette, à partir de u_n , de déterminer γ à moins de 10^{-2} près.