

## Devoir Maison 7 - vacances d'hiver

Ce devoir est facultatif. Il est inspiré par le Concours Commun Centrale Supélec (PC, 2000, épreuve 1).  
Je vous propose l'énoncé « normal » puis des indications pour avancer si vous êtes bloqué.

---

Soit  $m$  un entier supérieur ou égal à 1. Tous les développements limités se font en 0.

1. Soit  $\lambda$  un réel non nul. Écrire le développement limité à l'ordre  $m$  en 0 de la fonction

$$x \mapsto e^{\lambda x}$$

2. Écrire le développement limité très simple à l'ordre  $m$  en 0 de la fonction

$$x \mapsto (e^x - 1)^m$$

3. Donner une autre expression du développement limité de la fonction

$$x \mapsto (e^x - 1)^m$$

En déduire, pour les entiers  $j$  entre 1 et  $m$ , la valeur de

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^j$$

---

### Indications :

- Pour obtenir un développement limité, se servir de la formule de Taylor Young est très rarement la meilleure idée, il vaut mieux faire des opérations.
- Lorsqu'on demande un développement limité *très simple* cela sous-entend que la partie régulière aura peu de monômes et/ou qu'on l'obtient facilement.
- Une partie de la difficulté vient de  $m$  qui est un entier supérieur ou égal à 1. On peut rendre les choses plus simples en choisissant une petite valeur pour  $m$ .
- Une somme avec des coefficients binomiaux, cela ne peut être que...
- Lorsqu'il existe, le développement limité d'ordre  $n$  est unique. Mais on peut l'obtenir de plusieurs façons différentes.