Devoir Maison 7 - corrigé

1. Le développement de l'exponentielle est usuel :

$$e^{\lambda x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \lambda x + \frac{\lambda^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\lambda^m}{m!}x^m + o(x^m)$$

2. Comme $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et que l'on peut élever une équivalence à la puissance fixée m,

$$(e^x - 1)^m \underset{x\to 0}{\sim} x^m \Leftrightarrow (e^x - 1)^m = x^m + o(x^m)$$

3. On peut commencer par utiliser la formule du binôme avant de faire un développement limité de chaque exponentielle de la somme. On regroupe ensuite les termes avec le même exposant, on regroupe aussi les m termes $o(x^m)$ dans un seul.

$$\begin{aligned}
(e^x - 1)^m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} e^{kx} \\
&= (-1)^m + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} e^{kx} \\
&\underset{x\to 0}{=} (-1)^m + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{k^j}{j!} \quad + o(x^m)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \underbrace{(-1)^m + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k}}_{=\lambda_0} + \sum_{j=1}^{m} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^j}_{=\lambda_j} \right) \frac{x^j}{j!} \quad + o(x^m)
\end{aligned}$$

On a obtenu ainsi un autre développement limité

$$(e^x - 1)^m = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1!}x + \cdots + \frac{\lambda_m}{m!}x^m + o(x^m)$$

Pour j entre 1 et m, les λ_j sont exactement les sommes que l'énoncé nous demande d'évaluer. Comme une fonction admet un unique développement limité, on peut identifier les coefficients, on en tire

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < m \\ m! & \text{si } j = m \end{cases}$$