

Devoir Maison 7 - corrigé

Partie I

1. On a $u_1 = \left(\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} \right) - \ln(1) \boxed{= 1}$.

2. Le Théorème des Accroissements Finis (TAF dans la suite) :

Soit deux réels $a < b$ et f une fonction définie sur $[a; b]$, continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$.

On applique le TAF à la fonction $\ln$ entre n et $n+1$: il existe $c \in]n; n+1[$ tel que $\ln'(c) = \ln(n+1) - \ln(n)$. Or $\ln'(c) = \frac{1}{c}$ et comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a $n \leq c \leq n+1 \implies \frac{1}{n} \geq \frac{1}{c} \geq \frac{1}{n+1}$.

Finalement, on a bien $\boxed{\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}}$.

4. Soit $n > 0$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right) - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \boxed{= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}$$

5. La question précédente ainsi que l'encadrement de la question 3 donnent, pour $n > 0$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \iff -\frac{1}{n+1} \geq -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \geq -\frac{1}{n} \iff 0 \geq u_{n+1} - u_n \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} : (\star)$$

On en déduit que $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

Par ailleurs, on a pour tout $n > 0$: $u_n - u_1 = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1)$.

L'encadrement $(\star)$ est écrit pour n mais, comme n est quelconque, on peut donc le considérer pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$:

$$\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, 0 \geq u_{k+1} - u_k \geq \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$$

En sommant de 1 à $n-1$ on obtient :

$$0 \geq u_n - u_1 \geq \frac{1}{n} - 1 \iff \boxed{1 \geq u_n \geq \frac{1}{n}}$$

6. $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.}}$

Par passage à la limite dans l'encadrement fourni à la question 5, on a $\boxed{0 \leq \gamma \leq 1}$.

7. (a) Soit $k > 0$. On factorise : $\forall x \in [k; k+1], f_k(x) = \frac{(x-k)(k+1-x)}{k(k+1)x}$.

On en déduit que $\forall x \in]k; k+1[: f_k(x) > 0$. De plus la fonction est nulle aux extrémités de l'intervalle. Finalement, f_k est strictement positive sur $]k; k+1[$, nulle en k et $k+1$.

(b) Considérons une primitive F_k de f_k . D'après la question précédente F_k est strictement croissante dans $[k; k+1]$. On a alors : $\boxed{F_k(k) < F_k(k+1)}$.

(c) On peut choisir $F_k(x) = \frac{x}{k} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \frac{(x-k)^2}{2} - \ln(x)$.

L'inégalité $F_k(k) \leq F_k(k+1)$ conduit après calcul à : $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right)$.

L'autre inégalité a déjà été obtenue en 3, on a bien : $\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \ln\frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right)}$.

8. On somme les inégalités obtenues à la question précédente :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &\leq \ln 2 - \ln 1 \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{3} &\leq \ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\ &\vdots \\ \frac{1}{n} &\leq \ln n - \ln(n-1) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

On obtient :

$$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq \ln n \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

L'inégalité de gauche redonne $u_n \leq 1$. Celle de droite s'écrit

$$\ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \implies 0 \leq u_n - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq u_n$$

Par passage à la limite, on obtient alors : $\boxed{\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1}$.

Partie II

1. Les fonctions g_1 et g_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a :

$$\forall x > 0, \quad g_1'(x) = \frac{2x+1}{x^3(x+1)^2} > 0 \quad \text{et} \quad g_2'(x) = -\frac{3x+2}{x^4(x+1)^2} < 0$$

On en déduit les tableaux

	0	∞
g_1	$-\infty$	0
g_2	$+\infty$	0
g_1	-	+

2. Soit $n > 0$. On a déjà calculé $u_n - u_{n+1}$ et trouvé : $u_n - u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$.

Alors $g_1(n) < 0$ entraîne :

$$-\frac{1}{n+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} < 0 \implies \boxed{u_n - u_{n+1} < \frac{1}{2n^2}}$$

De même, $g_2(n) > 0$ entraîne :

$$-\frac{1}{n+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{3n^3} > 0 \implies \boxed{\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3} < u_n - u_{n+1}}$$

3. (a) La dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est croissante dans l'intervalle $[k, k+1]$. L'inégalité des accroissements finis donne donc l'encadrement $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2}$.

En sommant ces inégalités entre $n-1$ et $p-1$ (à droite) et entre n et p (à gauche), on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{n} - \frac{1}{p+1} \leq \sum_{k=n}^p \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{p}}$$

(b) De même l'inégalité des accroissements finis appliquée à $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ donne :

$$\frac{2}{(k+1)^3} \leq \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{2}{k^3}$$

ce qui conduit après sommations à :

$$\boxed{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(p+1)^2} \leq 2 \sum_{k=n}^p \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{p^2}}$$

(c) En sommant l'encadrement de la question 2. pour k entre n et p , on obtient :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=n}^p \frac{1}{k^2} - \frac{2}{3} \sum_{k=n}^p \frac{1}{k^3} \leq u_n - u_{p+1} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n}^p \frac{1}{k^2}$$

On utilise alors les encadrements de 3.a. et 3.b.. Il vient :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p+1} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{p^2} \right) \leq u_n - u_{p+1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{p} \right)$$

On fixe alors n , le passage à la limite pour $p \rightarrow \infty$ dans les inégalités donne :

$$\boxed{\frac{1}{2n} - \frac{1}{3(n-1)^2} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2(n-1)}}$$

4. L'encadrement précédent détermine γ avec une erreur inférieure à 10^{-2} lorsque

$$\frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3(n-1)^2} \leq 10^{-2} \iff \frac{5n-3}{6n(n-1)^2} \leq 10^{-2}.$$

On trouve par évaluation numérique que le plus petit entier permettant d'approcher γ à la précision demandée est $\boxed{n=10}$.