Devoir Maison 9

Ce devoir est à remettre par groupes le mardi 2 mai.

Il porte sur les espaces vectoriels de dimensions finies.
À la rentrée vous sera proposé un autre DM d'algèbre, sur les applications linéaires.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit au vecteur nul et de dimension finie n. On se donne deux sous-espaces vectoriels A et B on cherche une condition caractérisant l'existence de sous-espaces vectoriels C tels que

— C est supplémentaire de A dans $A+B$

— C est supplémentaire de B dans $A+B$

On dira alors que C est un supplémentaire *commun* à A et B dans $A+B$.

1. On suppose qu'il existe un sous-espace C vérifiant la condition du préambule.
   Montrer que $\dim(A) = \dim(B)$. Préciser $\dim(C)$.

Dans toute la suite de l'exercice, on supposera que $\dim(A) = \dim(B)$.

2. On se place d'abord dans le cas où A et B sont deux hyperplans distincts.
   On rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim(E) - 1$.
   (a) Montrer qu'il existe des vecteurs $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a \notin B$ et $b \notin A$.
   (b) Montrer que $C = \mathrm{Vect}(a+b)$ est solution au problème posé.
3. On revient au cas général en supposant seulement $\dim(A) = \dim(B)$ avec $A \neq B$.
   On considère un sous-espace A' supplémentaire de $A \cap B$ dans A et un sous-espace B' supplémentaire de $A \cap B$ dans B.
   (a) Montrer que A' et B' ne sont pas réduits au vecteur nul, que leur intersection est réduite au vecteur nul et qu'ils sont de même dimension.

   On note p cette dimension. On considère une base $\mathscr{A} = (a_1, \cdots, a_p)$ de A' et une base $\mathscr{B} = (b_1, \cdots, b_p)$ de B'. On définit enfin une famille $\mathscr{C} = (c_1, \cdots, c_p)$ en posant $c_i = a_i + b_i$ pour les entiers i entre 1 et p.

   (b) Montrer que la famille $\mathscr{C}$ est libre.
   (c) Montrer que $C = \mathrm{Vect}(c_1, \cdots, c_p)$ est un supplémentaire commun à A et B dans $A+B$.