2 heures

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page). Il est vivement conseillé de commencer par l'exercice 1.
- Les questions sont de difficulté variable. Certaines sont difficiles, les idées que vous aurez seront valorisées même si elles n'aboutissent pas.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à encadrer les résultats. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Question 1 : Résoudre l'équation $\dfrac{U\sqrt{7}+2}{\pi} = U + \dfrac{1}{3}$.

Question 2 : Résoudre l'équation $|x+3| = |x-\pi|$.

Question 3 : Résoudre l'inéquation $x^3 - 2x^2 \leq x - 21$.

Question 4 : Quel est de domaine de définition de la fonction $f(x) = \ln(x+3) + \sqrt{x^2+x-1}$?

Exercice n° 2

On considère la suite de Fibonacci, c'est-à-dire la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\phi_0 = 0,\ \phi_1 = 1 \qquad \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$$

Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n = (-1)^n$.

Exercice n° 3

1. Enoncer la définition d'une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. Enoncer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+x} \end{array} \right.$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
4. Déduire des questions précédentes que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

Exercice n° 4

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{-x^2+8x-12}{x^2-4x+3}$.

1. Etude de la fonction f.
   a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
   b) Après avoir justifié la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}$, déterminer $f'(x)$.
   c) En déduire les variations de f.
   d) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
   e) Construire le tableau de variations complet de f, dessiner l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
2. Déterminer l'ensemble $f(\mathbb{R})$ puis, pour $y \in \mathbb{R}$, justifier que l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ n'est jamais vide et qu'il contient, le plus souvent, deux éléments.
   (On rappelle que $f^{-1}(\{y\})$ est l'image réciproque de $\{y\}$ par f, c'est $\{x \in \mathcal{D} / f(x) = y\}$)
3. Soit la fonction $g : x \longmapsto \max\left(f^{-1}\left(\{f(x)\}\right)\right)$. Etudier g et donner l'allure de sa courbe représentative.