PCSI Mathématiques - Devoir Surveillé 1 18/9/2021

2 heures

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page). Il est vivement conseillé de commencer par l'exercice 1.
- Les questions sont de difficulté variable. Certaines sont difficiles, les idées que vous aurez seront valorisées même si elles n'aboutissent pas.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à encadrer les résultats. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Dans ce devoir, comme dans tout ceux qui suivront, vous avez le droit d'utiliser le résultat d'une question (même non abordée) pour traiter les questions suivantes.

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Question 1 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{x\sqrt{7}-1}{\pi} = 5-2x$.

Question 2 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2+3x-5}{2x^2-5x+2} \geq 0$.

Question 3 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Question 4 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x-\pi| < |5-x|$.

Exercice n° 2

Dans tout l'exercice, a et b désignent des réels.

1. Rappeler les formules pour $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.
2. On suppose à présent que ni a, ni b, ni $a+b$, ni $a-b$ ne sont congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π, de sorte que les tangentes de ces nombres existent.

   a) Prouver la relation $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

   b) En déduire une relation pour $\tan(a-b)$

Problème : formule du binôme de Newton

Partie A : Factorielle

Définition
Soit n un entier naturel.
On définit l'entier « factorielle de n », notée $n!$, par $n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \times (n-1)! & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Calculer $0!, 1!, 2!, 3!$ et $5!$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier les nombres $\dfrac{(n+1)!}{n!}$ et $\dfrac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!}$.
3. Prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$ (c'est-à-dire $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$).
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel nombre est le plus grand : $(n!)^2$ ou $(2n)!$?

Partie B : Coefficients binomiaux

Définition
Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.
On définit le coefficient binomial « p parmi n », noté $\binom{n}{p}$ par : $\dbinom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Calculer $\binom{4}{3}$, $\binom{3}{4}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{5}$, $\binom{0}{0}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{n-1}$.
3. Soit $0 \leq p < n$. Montrer que $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

   Cette formule est connue sous le nom *Relation de Pascal*.
4. Peut-on généraliser la relation de Pascal au cas $p = n$?
5. On crée un tableau dont les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de 0. Dans ce tableau on écrit les coefficients binomiaux de la façon suivante : $\binom{n}{p}$ est inscrit dans la cellule qui est à la ligne n et la colonne p.
   (a) Quelle est l'allure de la colonne numérotée 0 ?
   (b) Voici les lignes numérotées 6 et 7 du tableau :

   $$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 0 & \ldots \end{array}$$

   À l'aide des questions précédentes, écrire la ligne numérotée 8.
   (c) Nous venons de voir comment construire le *Triangle de Pascal* qui donne les coefficients binomiaux. Quelle conséquence en déduisez-vous sur la nature des nombres $\binom{n}{p}$?

Partie C : Formule du binôme de Newton

Dans la suite, a et b désignent des nombres réels (ou complexes, ça fonctionne aussi).

1. Développer $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ (on ordonnera les termes par puissance décroissante de a).
2. En déduire les développements de $(a-b)^3$ et $(a-b)^4$ (on ordonnera les termes par puissance décroissante de a).
3. Prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

4. Déduire des questions précédentes le développement de $(a+b)^7$.