2 heures

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page). Il est vivement conseillé de commencer par l'exercice 1.
- Les questions sont de difficulté variable. Certaines sont difficiles, les idées que vous aurez seront valorisées même si elles n'aboutissent pas.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à encadrer les résultats. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Barème prévisionnel :
ex1 : 3 points, ex2 : 7 points, ex3 : 5 points, ex4 : 3 points, ex5 : 3 points, ex6 : 5 points
Réponses encadrées : 1 point, aspect de la copie et orthographe : 1 point.

Exercice n° 1

Question de cours : soit z, un complexe différent de 1, n un entier naturel.
Donner la formule pour $\sum_{k=0}^{n} z^k$ et démontrez-la.

Exercice n° 2

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Question 1 : Simplifier au maximum le nombre $\dfrac{6^3 \times 12^{-4}}{4^2 \times 2^{-5}}$.

Question 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier au maximum $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$.

Question 3 : Résoudre l'équation $\dfrac{U\sqrt{7}+2}{\pi} = U + \dfrac{1}{3}$.

Question 4 : Résoudre l'équation $|2x+3| = \pi$.

Question 5 : Résoudre l'équation $|x+3| = |x-\pi|$.

Question 6 : Résoudre l'inéquation $x^3 - 2x^2 \leq x - 2$.

Exercice n° 3

L'objet de cet exercice est de faire l'étude complète de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{-x^2+8x-12}{x^2-4x+3}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Après avoir justifié la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}$, déterminer $f'(x)$.
3. En déduire les variations de f.
4. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
5. Construire le tableau de variations complet de f, dessiner l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Exercice n° 4

Soit n et p des entiers naturels non nuls et f la fonction définie pour tout $x \in [0;1]$ par $f(x) = x^n(1-x)^p$.
Déterminer les extremas de f.

Exercice n° 5

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : $5^n \geq 4^n + 3^n$.

Exercice n° 6

1. Soit $(x;y) \in [1;+\infty[^2$. Montrer que $x+y \leq 1+xy$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ des réels appartenant à $[1;+\infty[$.

   On rappelle que le produit $a_1 \times a_2 \times a_n$ se note $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$.

   (a) Démontrer que $\displaystyle\left(1+\prod_{i=1}^{n} a_i\right)(1+a_{n+1}) \leq 2\left(1+\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right)$.

   (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \leq 2^{n-1}\left(1+\prod_{i=1}^{n} a_i\right)$$