3 heures - sujet étoile

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page).
- Les questions sont de difficulté variable. Certaines sont difficiles, les idées que vous aurez seront valorisées même si elles n'aboutissent pas.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à encadrer les résultats. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Dans ce devoir, comme dans tous les autres, vous avez le droit d'utiliser le résultat d'une question (même non abordée) pour traiter les questions suivantes.

Conseil de gestion du temps : VF = 30min, Algèbre = Probabilités = 45min, Analyse = 1h.

Vrai ou Faux

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justier la réponse donnée.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension 3.
Il est possible de trouver des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ tels que $E = \text{Vect}(\vec{a}, \vec{b}) \oplus \text{Vect}(\vec{c}, \vec{d})$.

2. Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Il est possible de trouver un endomorphisme u de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$.

3. Soit $E = \text{Vect}(X, X+1, X+2)$. Il est possible de construire un isomorphisme entre $\mathbb{R}^2$ et E.

4. Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}_2[X]$ qui vérifie $f \circ f = 0$. Alors, $\text{rg } f = 1$.

5. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A et B deux événements. Si $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ alors $A \cap B = \emptyset$.

6. Un élève répond au hasard aux cinq questions d'un questionnaire de type Vrai ou Faux. La probabilité qu'il ait exactement trois réponses correctes est égale à $\dfrac{10}{32}$.

7. On poursuit la question précédente. Dans le Vrai ou Faux, chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse est pénalisée de 0,5 points. La note moyenne à laquelle l'élève peut prétendre est 2 sur 5.

8. Une suite qui n'est pas monotone diverge.

9. Si $\sum u_n$ converge alors $\sum u_{2n}$ converge aussi.

10. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\sum \dfrac{u_n}{n^2}$ converge aussi.

Algèbre

Soit $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie pour tout polynôme P par :

$$f(P) = (3X+8)P + (X^2 - 5X)P' + (X^2 - X^3)P''$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
2. Soit P un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$.
   Prouver que si $n \neq 3$ alors $\deg(f(P)) = n+1$, et que si $n = 3$ alors $\deg(f(P)) \leq n$.
3. f est-elle surjective ?
4. Justifier que $\ker(f) \subset \mathbb{K}_3[X]$.
5. a) Montrer que $\mathbb{K}_3[X]$ est stable par f.

   On note ϕ l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{K}_3[X]$, c'est-à-dire tel que $\phi(P) = f(P)$ pour tout $P \in \mathbb{K}_3[X]$.

   b) Déterminer la matrice de ϕ relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$.
   c) Déterminer une famille génératrice puis une base de $\mathrm{Im}(\phi)$.
   d) En déduire la dimension de $\ker(\phi)$.
   e) Donner une base de $\ker(f)$.
6. On cherche tous les polynômes unitaires P pour lesquels il existe un scalaire λ tel que $f(P) = \lambda P$.
   a) En supposant qu'un tel polynôme existe, quel est son degré ?
   b) Prouver qu'il existe exactement quatre polynômes qui vérifient les conditions demandées. On précisera les polynômes et les scalaires λ associés.
   c) Prouver que les quatre polynômes trouvés constituent une base de $\mathbb{K}_3[X]$, on la note $\mathscr{B}$.
   d) Donner la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}$.

Probabilités

Soit X une variable aléatoire prenant pour valeurs un nombre fini d'entiers naturels.

1. a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X > k-1)$ et $\mathbb{P}(X > k)$.
   b) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$$

2. Soit n, p des entiers naturels non nuls. On considère une urne contenant n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n.
   On effectue p tirages successifs dans l'urne et on note X le plus grand nombre obtenu.
   a) Quel est l'univers ? Quel est la probabilité sur cet univers ?
   b) Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X \leq k)$.
   c) En déduire la loi de X.
3. a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{k}{n}\right)^p$.
   b) En déduire, à l'aide de la question 1, un équivalent de $E(X)$ pour $n \to +\infty$.

Problème d'analyse : étude de $\sum \dfrac{1}{n^2}$

I. Résultats préliminaires

1. a) Prouver que, pour tous réels a et b, on a $\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$.

   b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant l'angle moitié $\frac{\theta}{2}$, factoriser $1 - e^{i\theta}$.

   c) On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ par : $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx)$.

   En utilisant la fonction S_n définie sur $[0; \frac{\pi}{2}$ par $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{i2kx}$, ainsi que les deux formules vues dans les questions précédentes, démontrer que :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin((2n+1)x) - \sin(x)}{2\sin(x)} & \text{si } x \in]0; \frac{\pi}{2}] \\ n \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, fixé. Soit la fonction g définie que $]0; \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = \frac{ax+bx^2}{\sin(x)}$.

   a) Justifier que l'on peut prolonger g par continuité en 0, préciser la valeur qu'a alors $g(0)$.
   Dorénavant, on considère que g est définie et continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

   b) Démontrer que g est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

   c) Calculer $g'(x)$ en fonction de x et démontrer que g' est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ (c'est-à-dire que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$).

3. On note, pour tout entier naturel n non nul, $G_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\sin(nx)\, \mathrm{d}x$.

   a) Justifier que G_n est bien défini.

   b) En utilisant une intégration par parties, prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n = 0$.

II. Nature et somme de $\sum \dfrac{1}{n^2}$

1. Justifier que $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.

   Dans la suite, on se propose de calculer la somme de $\sum \dfrac{1}{n^2}$, c'est-à-dire la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

   a) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2kx)\, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(2kx)\, \mathrm{d}x$.

   b) Déterminer les réels a et b tels que l'on ait $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)\cos(2kx)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{4k^2}$.
   Dans la suite, le couple (a, b) a la valeur ainsi déterminée.

3. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2) f_n(x)\, \mathrm{d}x$.

4. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 2G_{2n+1} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)\, \mathrm{d}x$.

5. Déduire des questions précédentes la somme de $\sum \dfrac{1}{n^2}$.