PCSI DS10 - Mathématiques 17/5/2025

3 heures

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page).
- Les questions sont de difficulté variable. Certaines sont difficiles, les idées que vous aurez seront valorisées même si elles n'aboutissent pas.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à encadrer les résultats. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

**Dans ce devoir, comme dans tous les autres, vous avez le droit d'utiliser le résultat d'une question (même non abordée) pour traiter les questions suivantes.**

# Vrai ou Faux

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justier la réponse donnée.

**1.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3.
Il est possible de trouver des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ tels que $E = \mathrm{Vect}(\vec{a}, \vec{b}) \oplus \mathrm{Vect}(\vec{c}, \vec{d})$.

**2.** Il est possible de trouver un endomorphisme $u$ de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

**3.** Soit $E = \mathrm{Vect}(X, X+1, X+2)$. Il est possible de construire un isomorphisme entre $\mathbb{R}^2$ et $E$.

**4.** Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $A$ et $B$ deux événements. Si $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ alors $A \cap B = \emptyset$.

**5.** Un élève répond au hasard aux cinq questions d'un questionnaire de type Vrai ou Faux. La probabilité qu'il ait exactement trois réponses correctes est égale à $\dfrac{10}{32}$.

**6.** On poursuit la question précédente. Dans le Vrai ou Faux, chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse est pénalisée de 0,5 points. La note moyenne à laquelle l'élève peut prétendre est 2 sur 5.

**7.** Une suite qui n'est pas monotone diverge.

**8.** Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

**9.** Si $\sum u_n$ converge alors $\sum u_{2n}$ converge aussi.

**10.** Si $\sum u_n$ converge alors $\sum |u_n|$ converge aussi.

# Deux exercices d'algèbre

### Exercice n° 1

On considère $E = \{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ P(1) - P'(1) = 0\}$.

1. Prouver que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) A quelle condition sur les réels $\alpha_n$ et $\beta_n$ a-t-on $X^n + \alpha_n X + \beta_n \in E$ ?

   b) En déduire un polynôme $P_n$, de degré $n$, qui soit dans $E$.
3. En utilisant la famille $(P_n)_n$, prouver que $E$ est de dimension infinie.
4. On pose $F = E \cap \mathbb{K}_3[X]$.
   (a) A-t-on $F = \mathbb{K}_3[X]$ ? Qu'en déduire pour $\dim(F)$ ?
   (b) Déterminer $\dim(F)$.
   (c) Donner un supplémentaire de $F$ dans $\mathbb{K}_3[X]$, c'est-à-dire un sous-espace $G$ tel que $F \oplus G = \mathbb{K}_3[X]$.
   (d) Donner une base de $\mathbb{K}_3[X]$ adaptée à $F \oplus G = \mathbb{K}_3[X]$.

## Exercice n° 2

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x; y; z) = (2x - y - z; x - z; x - y)$.

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
5. $f$ est-il injectif ? Surjectif ? Est-ce un automorphisme ?
6. Prouver que $f$ est une projection. Préciser ses éléments caractéristiques qu'on désigne dans la suite par $F$ et $G$.
7. Quel est le rang de $f$ ?
8. Donner une expression de la projection associée à $f$, c'est à dire de la projection sur $G$ parallèlement à $F$.

# Problème d'analyse : étude de $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$

### I. Résultats préliminaires

1. a) Prouver que, pour tous réels $a$ et $b$, on a $\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$.

   b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant l'angle moitié $\frac{\theta}{2}$, factoriser $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

   c) On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$ définie pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ par : $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx)$.

   En utilisant la fonction $S_n$ définie sur $[0; \frac{\pi}{2}$ par $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2kx}$, ainsi que les deux formules vues dans les questions précédentes, démontrer que :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin((2n+1)x) - \sin(x)}{2\sin(x)} & \text{si } x \in ]0; \frac{\pi}{2}] \\ n \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, fixé. Soit la fonction $g$ définie que $]0; \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = \frac{ax+bx^2}{\sin(x)}$.

   a) Justifier que l'on peut prolonger $g$ par continuité en 0, préciser la valeur qu'a alors $g(0)$. Dorénavant, on considère que $g$ est définie et continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

   b) Démontrer que $g$ est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

   c) Calculer $g'(x)$ en fonction de $x$ et démontrer que $g'$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ (c'est-à-dire que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$).

3. On note, pour tout entier naturel $n$ non nul, $G_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \sin(nx)\ \mathrm{d}x$.

   a) Justifier que $G_n$ est bien défini.

   b) En utilisant une intégration par parties, prouver que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} G_n = 0$.

### II. Nature et somme de $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$

1. Justifier que $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

   Dans la suite, on se propose de calculer la somme de $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$, c'est-à-dire la limite $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

   a) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2kx)\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(2kx)\ \mathrm{d}x$.

   b) Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que l'on ait $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax + bx^2) \cos(2kx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4k^2}$.
   Dans la suite, le couple $(a, b)$ a la valeur ainsi déterminée.

3. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax + bx^2) f_n(x)\ \mathrm{d}x$.

4. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 2G_{2n+1} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax + bx^2)\ \mathrm{d}x$.

5. Déduire des questions précédentes la somme de $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$.