Correction du DS1 de mathématiques, proposé le 18/9

Exercice n° 1

Question 1 : On a : $\dfrac{U\sqrt{7}+2}{\pi} = U + \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow U\left(\dfrac{\sqrt{7}}{\pi} - 1\right) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{\pi} \Leftrightarrow U = \dfrac{\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi}}{\frac{\sqrt{7}}{\pi} - 1} \Leftrightarrow \boxed{U = \dfrac{\pi - 6}{3\sqrt{7} - 3\pi}}$.

Question 2 : On interprète chaque valeur absolue comme une distance.

— $|x+3| = |x-(-3)|$ est la distance entre le réel x et (-3).

— $|x-\pi|$ est la distance entre le réel x et π.

Résoudre l'équation $|x+3| = |x-\pi|$ c'est trouver tous les réels équidistants de (-3) et π. On a donc une seule solution : $\boxed{x = \dfrac{-3+\pi}{2}}$.

Question 3 : On a $x^3 - 2x^2 \leq x - 2 \Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)(x-1) \leq 0$.

On construit le tableau de signes de $f(x) = (x-2)(x+1)(x-1)$:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\boxed{x^3 - 2x^2 \leq x - 2 \Longleftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup [1; 2]}$.

Question 4 : $f(x) = \ln(x+3) + \sqrt{x^2+x-1}$ a du sens si, et seulement si, $\ln(x+3)$ et $\sqrt{x^2+x-1}$ en ont.

— $\ln(x+3)$ a du sens si, et seulement si, $x+3 > 0 \Leftrightarrow x \in]-3; +\infty[$.

— $\sqrt{x^2+x-1}$ a du sens si, et seulement si, $x^2+x-1 \geq 0$.

$P(x) = x^2+x-1$ est un polynôme du second degré dont le discriminant est $\Delta = 5$, il admet deux racines distinctes : $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Il suit que $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$.

Finalement, $f(x)$ a du sens si, et seulement si, $x \in]-3; +\infty[\cap \left(]-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[\right)$; autrement dit : $\boxed{\text{le domaine de définition de } f \text{ est }]-3; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[}$.

Exercice n° 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: $\phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n = (-1)^n$, démontrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence.

Initialisation pour $n = 0$: on doit vérifier si $\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = (-1)^0$. Calculons :

Tout d'abord, $\phi_2 = \phi_1 + \phi_0 = 1 + 0 = 1$.

D'une part : $\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = 1 - 1 \times 0 = 1$, d'autre part :$(-1)^0 = 1$. $\underline{\mathcal{P}(0) \text{ est donc vraie}}$.

Hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire (HDR) : $\phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n = (-1)^n$, montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est également vraie, c'est-à-dire $\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+3}\phi_{n+1} = (-1)^n$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+3}\phi_{n+1} & = & \phi_{n+2}^2 - (\phi_{n+2} + \phi_{n+1})\phi_{n+1} = \\
& = & \phi_{n+2}(\phi_{n+2} - \phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\
& = & \phi_{n+2}\phi_n - \phi_{n+1}^2 \\
& = & -(\phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n) \\
& = & -(-1)^n \\
& = & (-1)^{n+1}
\end{array}$$

Finalement, $\underline{\mathcal{P}_{n+1} \text{ est bien vraie}}$.

Conclusion : la propriété a été intialisée pour $n = 0$, elle est héréditaire, $\boxed{\text{elle est donc vraie pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

Exercice n° 3

1. On dit que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ lorsque : $\boxed{\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2,\ x\le y \Longrightarrow f(x)\le f(y)}$.
2. L'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$: $\boxed{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x+y|\le|x|+|y|}$.
3. $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ 1+x\neq 0$, f est donc bien définie sur $\mathbb{R}^+$.
   Elle est également dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de fonctions dérivables et on a :
   $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$ donc $\boxed{f \text{ est (strictement) croissante sur l'intervalle } \mathbb{R}^+}$.
4. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. D'après l'inégalité triangulaire, $|x+y|\le|x|+|y|$. Ces nombres sont positifs, en appliquant la fonction f qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$ il vient :

$$f(|x+y|)\le f(|x|+|y|) \iff \frac{|x+y|}{1+|x+y|}\le\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}$$

On écrit alors $\dfrac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}=\dfrac{|x|}{1+|x|+|y|}+\dfrac{|y|}{1+|x|+|y|}\le\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}$ et on a le résultat voulu.

$$\boxed{\text{Finalement, } \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{|x+y|}{1+|x+y|}\le\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}}.$$

Exercice n° 4

On considère la fonction $f: x\longmapsto \dfrac{-x^2+8x-12}{x^2-4x+3}$.

1. Etude de la fonction f.
   a) $f(x)$ existe si, et seulement si, $x^2-4x+3\neq 0$. Or, $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$, on en déduit que les valeurs interdites sont 1 et 3 et que $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathcal{D}=\mathbb{R}\backslash\{1;3\}}$.
   b) f est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme quotient de fonctions dérivables et on a :

$$\forall x\in\mathcal{D},\ f'(x)=\frac{(-2x+8)(x^2-4x+3)-(-x^2+8x-12)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}=\frac{-4x^2+18x-24}{(x^2-4x+3)^2}=\boxed{-2\frac{2x^2-9x+12}{(x^2-4x+3)^2}}.$$

   c) f est strictement monotone sur les intervalles inclus dans $\mathcal{D}$ sur lesquels f' est de signe constant.
   Pour tout $x\in\mathcal{D}$, $f'(x)$ a le signe opposé de $P(x)=2x^2-9x+12$. P a pour discriminant $\Delta=-15<0$, on en déduit que P est strictement positif et donc que f' est strictement négative.
   Il suit que $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty;1[,\ ]1;3[\text{ et }]3;+\infty[}$.
   d) Etudions les limites de $f(x)$ aux bornes de $\mathcal{D}$.
   — Bornes infinies : Pour $x\in\mathcal{D}\backslash\{0\}$, on a $f(x)=\frac{-x^2+8x-12}{x^2-4x+3}=\frac{-1+\frac{8}{x}-\frac{12}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}$.
   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} -1+\dfrac{8}{x}-\dfrac{12}{x^2}=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}=1$. Par quotient, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1}$.
   De façon analogue, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1}$.
   — Bornes finies : déterminons les limites du dénominateur et du numérateur en 1^-, 1^+, 3^- et 3^+.
   x^2-4x+3 est une fonction polynômiale de degré 2 qui s'annule en 1 et 3, sa parabole représentative est orientée vers le haut, on en déduit :

$$\lim_{x\to1^-} x^2-4x+3=0^+\ ;\ \lim_{x\to1^+} x^2-4x+3=0^-\ ;\ \lim_{x\to3^-} x^2-4x+3=0^-\ ;\ \lim_{x\to3^+} x^2-4x+3=0^+$$

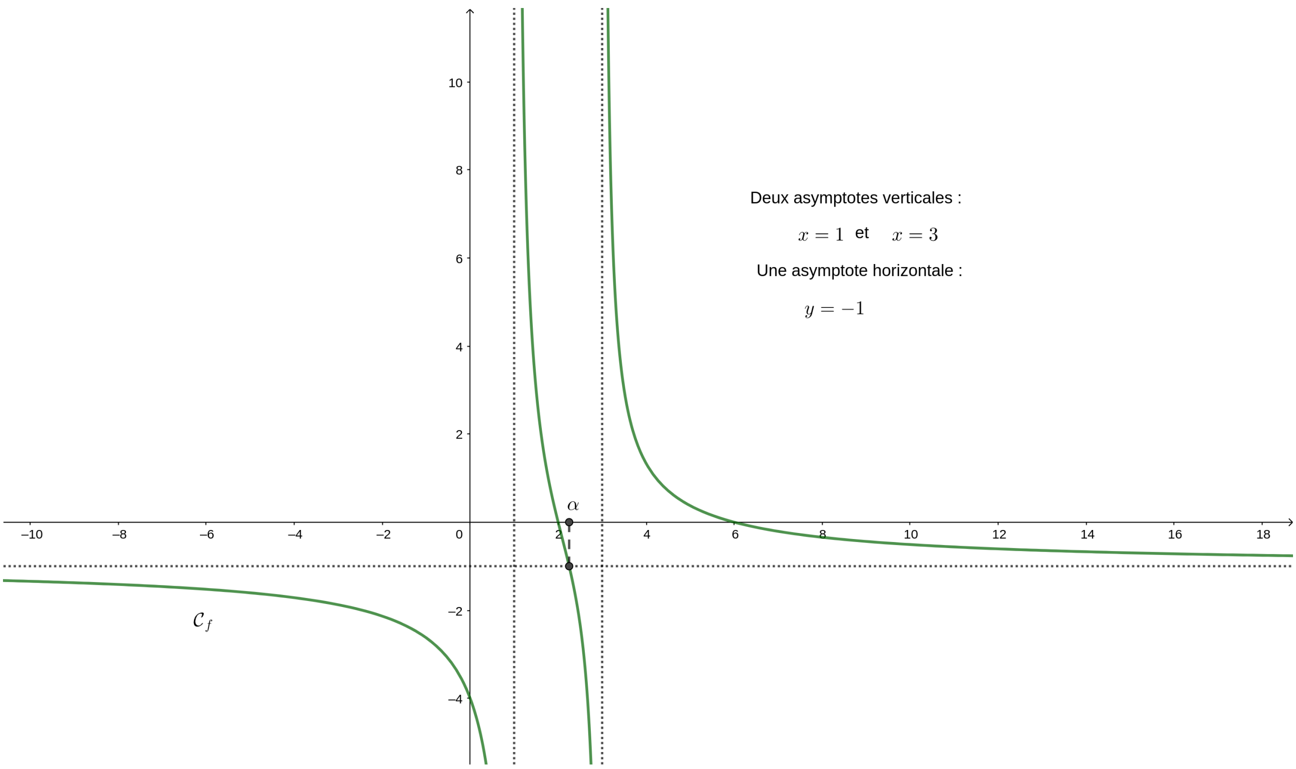
   Le numérateur $-x^2+8x-12$ est continu sur $\mathbb{R}$ et donc $\lim\limits_{x\to1} -x^2+8x-12=-(1^2)+8-12=-5$ et de façon analogue $\lim\limits_{x\to3} -x^2+8x-12=21$. On peut donc donner toutes les limites par opérations :

$$\boxed{\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty\ ;\ \lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty\ ;\ \lim_{x\to3^-} f(x)=-\infty\ ;\ \lim_{x\to3^+} f(x)=+\infty}$$

e) Dressons le tableau de variations complet de f :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
f	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

On trace la courbe représentative de f dans un repère orthonormé :



2. D'après le travail fait précédemment, il est clair que $\boxed{f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \text{ et donc, pour tout } y \in \mathbb{R}, f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset}$.
Plus précisément, f met en bijection plusieurs intervalles :
— f réalise une bijection de $]-\infty;1[$ vers $]-1;-\infty[$, notons f_1 cette bijection ;
— f réalise une bijection de $]1;3[$ vers $\mathbb{R}$, notons f_2 cette bijection ;
— f réalise une bijection de $]3;+\infty[$ vers $]+\infty;-1[$, notons f_3 cette bijection ;.

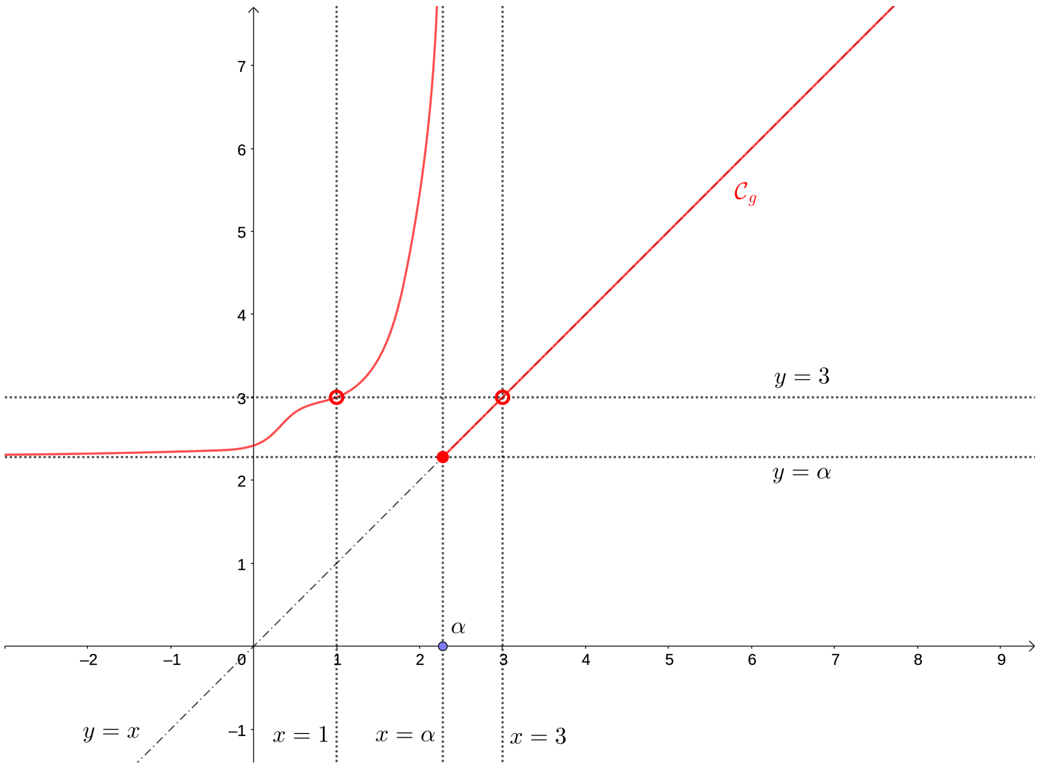
Il suit que, pour $y \in \mathbb{R}$:
— si $y < -1$, y a exactement deux antécédents par f : $f_1^{-1}(y) \in]-\infty;1[$ et $f_2^{-1}(y) \in]1;3[$;
— si $y = -1$ alors y a exactement un antécédent par f : $f_2^{-1}(-1)$; ce nombre est dans $]1;3[$, <u>on le nomme α</u> ;
— si $y > -1$, y a exactement deux antécédents par f : $f_2^{-1}(y) \in]1;3[$ et $f_3^{-1}(y) \in]3;+\infty[$.

Finalement, $\boxed{\text{pour } y \in \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ f^{-1}(\{y\}) \text{ a deux éléments et } f^{-1}(\{-1\}) \text{ en a un unique : } \alpha}$.

3. Il est clair que $g(x) = \max\left(f^{-1}\left(\{f(x)\}\right)\right)$ a du sens si, et seulement si, $f(x)$ en a et donc $\boxed{g \text{ est définie sur } \mathcal{D}}$.

On distingue plusieurs cas :
— Si $x < 1$, $f(x) < -1$ et d'après ce qu'on a vu, $f^{-1}\left(\{f(x)\}\right)$ comporte deux éléments : $x = f_1^{-1}(f(x))$ et un nombre de $]1;3[$ qui est $f_2^{-1}(f(x))$, ce dernier est strictement supérieur à x, c'est donc $g(x)$.
— Si $1 < x < \alpha$, $f(x) > -1$ et $f^{-1}\left(\{f(x)\}\right)$ comporte deux éléments : $x = f_2^{-1}(f(x))$ et un nombre de $]3;+\infty[$ qui est $f_3^{-1}(f(x))$; ce dernier est strictement supérieur à x, c'est donc $g(x)$.
— Si $x = \alpha$ alors $f(x) = -1$ et $f^{-1}\left(\{f(x)\}\right)$ comporte un unique élément : $\alpha = f_2^{-1}(-1)$. On a donc $g(\alpha) = \alpha$.
— Si $\alpha < x < 3$, $f(x) < -1$ et $f^{-1}\left(\{f(x)\}\right)$ comporte deux éléments : $x = f_2^{-1}(f(x))$ et un nombre de $]-\infty;-1[$ qui est $f_1^{-1}(f(x))$; ce dernier est strictement inférieur à x, on a donc $g(x) = x$.
— Si $x > 3$, $f(x) > -1$ et $f^{-1}\left(\{f(x)\}\right)$ comporte deux éléments : $x = f_3^{-1}(f(x))$ et un nombre de $]1;\alpha[$ qui est $f_2^{-1}(f(x))$; ce dernier est strictement inférieur à x, on a donc $g(x) = x$.

On en déduit l'allure de la courbe représentative de g :



Remarque : notez bien que cette courbe est l'*allure* de $\mathcal{C}_g$. On ne dispose pas d'expression algébrique pour $g(x)$, sauf pour $x \in [\alpha; +\infty[\setminus\{3\}$ auquel cas $g(x) = x$. Pour la construire sur $]-\infty; 1[$ et $]1; \alpha[$, il faut la déduire par transformations géométriques des courbes représentatives de f_1, f_2 et f_3.